Automates à états finis et langages réguliers

Rappels des notions essentielles et plus de 170 exercices corrigés

Yliès Falcone

Maître de conférences à
l'Université Grenoble Alpes

Membre du Laboratoire d'Informatique de Grenoble
et d'Inria Grenoble Rhône-Alpes

Jean-Claude Fernandez

Ancien Professeur à l'Université Grenoble Alpes

Ancien membre du laboratoire Verimag

DUNOD

Illustration de couverture :
© Anita Ponne – Adobe Stock

© Dunod, 2020
11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-080846-5

Table des matières

Avant-Propos

À qui s'adresse ce livre ?

Cet ouvrage s'adresse aux étudiants de premier cycle universitaire suivant un cursus incluant l'informatique (étudiants dans un parcours d'informatique intégral, de mathématiques appliquées ou de mathématiques). Il vise aussi bien les étudiants des IUT, de licences et de classes préparatoires aux grandes écoles. Peu de pré-requis sont nécessaires et correspondent à ceux d'un cours de la théorie des ensembles telle que enseignée en première année de l'enseignement supérieur. Les notions de cours nécessaires sont par ailleurs rappelées dans le premier chapitre.

Langages, automates et informatique

La théorie des langages et des automates revêt un aspect particulier dans l'apprentissage de l'informatique. C'est un sujet qui appartient à la branche fondamentale de l'informatique, tant les concepts abordés se retrouvent dans de nombreuses disciplines de l'informatique aussi bien théoriques qu'appliquées (par exemple la conception des processeurs, la compilation de programmes informatiques, la traduction automatique des langues naturelles, l'intelligence artificielle, la bio-informatique, la vérification de programmes embarqués critiques, la cybersécurité, etc.). Nous développons ce point dans l'introduction en donnant des exemples d'utilisation de cette théorie. La théorie des langages et automates est un enseignement incontournable dans tout cursus d'informatique, tant en France qu'à l'étranger.

Philosophie du livre

L'objectif de cet ouvrage est de conduire le lecteur vers la maîtrise des concepts et techniques de langage à états, ou langage rationnel. Il est orienté vers la pratique d'exercices. Il se veut être un outil accompagnant le travail des étudiants à travers à la fois des exercices simples d'application pour l'appropriation des notions et des exercices plus avancés pour la maîtrise des concepts. Chaque chapitre comporte un rappel des notions essentielles du cours

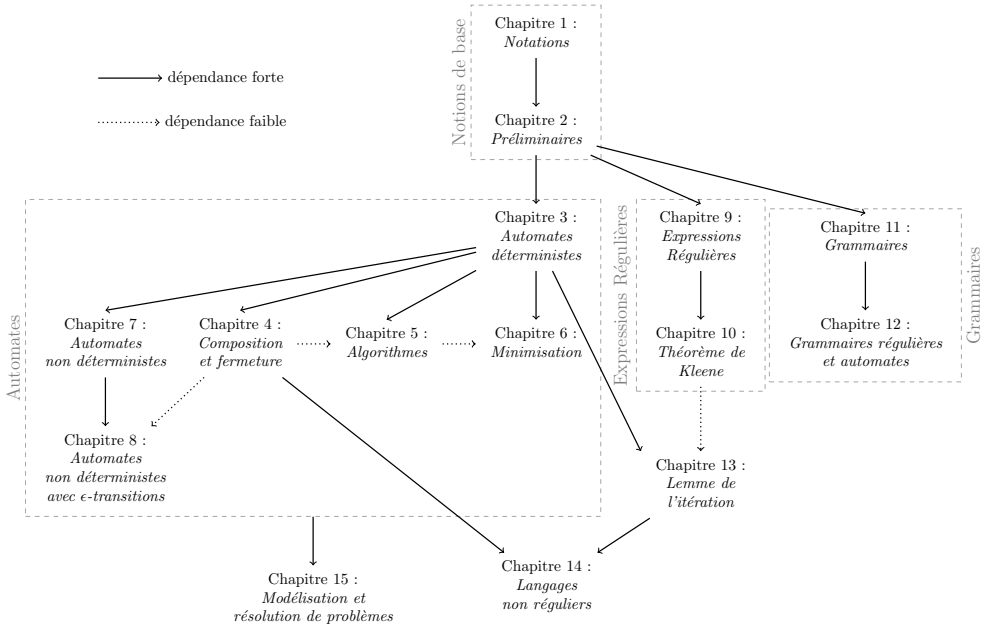


Figure 1 – Plan par chapitre et dépendance entre chapitres.

(nécessaire et suffisant pour la résolution des exercices), les énoncés des exercices et pour chaque exercice, une solution complète. Pour les exercices difficiles, nous fournissons des indications, permettant de débloquer la recherche de la solution sans consulter la solution. Les auteurs sont convaincus des bienfaits de la recherche de solutions, qui développe les compétences et l'apprentissage (et de la relative inutilité de consulter immédiatement une solution sans rechercher la solution au préalable). Les rappels de cours permettent de fixer les notations et donnent les outils pour résoudre les exercices. Les rappels de cours ne comportent pas de démonstrations des théorèmes abordés, mais certaines démonstrations sont traitées dans les exercices. Dans chaque section d'exercices, pour chaque notion, nous proposons des exercices de difficulté croissante, commençant toujours pas des exercices d'application directe du cours pour vérifier la compréhension des concepts. Les solutions d'exercices sont détaillées, permettant le travail autonome du lecteur.

Vue d'ensemble du livre

Vue d'ensemble. Après avoir rappelé les notions indispensables de mathématiques pour pouvoir résoudre les exercices, un premier chapitre est consacré à la notion de langage. Puis nous introduisons les notions d'automates déterministes, non déterministes, non déterministes avec epsilon transitions. Notons que ces trois variations d'automate ont la même puissance d'expression. Un lien est ensuite fait avec la notion d'expressions régulières et de grammaires. Chaque chapitre est structuré de la manière suivante : une partie cours, une partie exercice et une partie solution des exercices.

Chapitre par chapitre. Nous donnons une brève description de chaque chapitre.

Dans le chapitre 1, nous rappelons les notions de mathématiques nécessaires et suffisantes : notions de logique, d'ensembles et de techniques de démonstration. Il n'y a pas d'exercice associé à ce chapitre.

Dans le chapitre 2, nous introduisons les notions d'alphabet, qui est un ensemble fini de symboles, de mots et de langage. Un mot est une composition de symboles appartenant à un alphabet, et un langage un ensemble de mots. Un alphabet est un ensemble fini de symboles et la composition de symboles pour former un mot s'appelle concaténation.

Dans le chapitre 3, nous définissons la notion d'automate déterministe où les règles de transition sont définies par une fonction qui, étant donné un état et une action, détermine l'état suivant. On définit le langage associé à un automate : une configuration est un couple (état, mot) et un mot est accepté si, partant d'une configuration initiale (état initial, mot), on atteint une configuration terminale formée d'un état accepteur et du mot vide.

Dans le chapitre 4, nous définissons les opérations sur les automates permettant de calculer l'intersection, l'union ou le complément de langages associés à un automate.

Dans le chapitre 5, nous présentons les algorithmes sur les automates en lien avec les opérations présentées au chapitre précédent.

Dans le chapitre 6, partant de la notion d'équivalence (ou de distinguabilité) entre états, nous présentons la minimisation des automates, c'est-à-dire que, pour un automate donné, nous pouvons obtenir un automate avec un nombre minimal d'états qui reconnaît le même langage. À partir de la relation d'équivalence entre états, on obtient l'automate quotient, c'est-à-dire l'automate dont les états sont les classes d'équivalence de l'automate initial et la fonction de transition est celle induite par la fonction de transition initiale compatible avec la relation d'équivalence.

Dans le chapitre 7, nous introduisons la notion d'automates non déterministes, en remplaçant dans la définition des automates la fonction de transition par une relation de transition : ainsi, à partir d'un état et d'un symbole, on peut atteindre un ensemble d'états au lieu d'un seul état. Nous avons la propriété suivante : pour tout langage reconnu par un automate non déterministe, il existe un automate reconnaissant le même langage. Nous en déduisons une procédure de déterminisation de l'automate non déterministe.

Dans le chapitre 8, nous introduisons les automates non déterministes avec ϵ-transition et on a un résultat similaire au précédent, c'est-à-dire que, à chacun de ces automates, on a un automate déterministe reconnaissant le même langage.

Dans le chapitre 9, nous introduisons les expressions régulières qui constituent un autre formalisme pour dénoter des langages d'états finis, ou langages rationnels.

Dans le chapitre 10, nous étudions le théorème de Kleene, indiquant que la classe des langages rationnels est celle des langages reconnus par des automates d'états finis. Ainsi, pour chaque expression régulière, nous pouvons trouver un automate reconnaissant le langage dénoté par cette expression régulière, et inversement.

Dans le chapitre 11, nous introduisons les grammaires et en particulier les grammaires régulières. Nous étudions l'équivalence entre formalismes pour le cas des grammaires régulières dans le chapitre 12 : pour tout langage reconnu par un automate à nombre fini d'états, il existe une expression régulière reconnaissant le même langage (et réciproquement), de plus il existe une grammaire régulière reconnaissant le même langage (et réciproquement).

Le chapitre 13 est dédié au lemme de l'itération, qui est une condition nécessaire à la régularité d'un langage. Nous utilisons le lemme de l'itération et les propriétés de fermeture

des langages réguliers dans le chapitre 14 pour démontrer que certains langages ne sont pas réguliers, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'automate reconnaissant ces langages.

Dans l'Annexe A, nous abordons la modélisation de problèmes et leur résolution en utilisant les automates. Nous introduisons également la notion de propriété caractérisée par un langage. Une modélisation (sous forme d'automate) satisfait une propriété si le langage associé à l'automate est inclus dans le langage associé à la propriété.

Remerciements

Cet ouvrage est né après plusieurs années d'enseignement d'un cours à l'Université Grenoble Alpes sur le sujet. Dans ses formes préliminaires, l'ouvrage a bénéficié du retour de plusieurs collègues participant à l'enseignement (en particulier Saddek Bensalem, Yassine Lakhnech et Anne Rasse), que nous remercions. Nous remercions également les étudiants, doctorants et post-doctorants de l'Université Grenoble Alpes Théo Barollet, Alaa Ben Fatma, Tom Cornebize, Florian Gallay, Ali Kassem, Charlotte Lefèvre et Marius Monnier, qui ont participé à la relecture des chapitres. Leurs relectures ont permis de s'assurer que les solutions des exercices soient abordables et claires du point de vue de l'étudiant. Enfin, nous remercions l'Université Grenoble Alpes [1], Inria Grenoble Rhône-Alpes [2] et le Laboratoire d'Informatique de Grenoble [3] pour les moyens et l'environnement de qualité mis à notre disposition facilitant notre travail quotidien.

Pour contacter les auteurs

Pour vos remarques ou rapports de coquilles, vous pouvez contacter les auteurs par email [4].

1. `www.univ-grenoble-alpes.fr`
2. `www.inria.fr/fr/centre-inria-grenoble-rhone-alpes`
3. `www.liglab.fr`
4. `prenom.nom@univ-grenoble-alpes.fr`

Introduction

Pourquoi étudier les automates et la théorie des langages ?

Cet ouvrage traite des concepts et techniques de langage à états, ou langage rationnel. Les notions abordées ont une importance fondamentale en informatique. Elles sont utilisées dans de nombreux domaines, que ce soit en informatique théorique ou appliquée. Le livre fait le lien entre une certaine classe de langages informatiques et les automates à nombre fini d'états (aussi appelés par ailleurs automates à états finis ou automates d'états finis). La notion d'automates est très ancienne [5] et a été utilisée dans les années 1950-1960 pour le calcul. Les premiers processeurs étaient constitués d'une **partie contrôle** et d'une **partie opérative**. La partie contrôle est un automate qui pilote la partie opérative pour réaliser par exemple des opérations arithmétiques et logiques ou pour faire des transferts mémoires. Par la suite, les automates ont été utilisés dans :

— la conception de matériel informatique,

— la reconnaissance de mots, l'analyse lexicale d'un compilateur,

— la reconnaissance de texte (formulaire internet, moteur de recherche, etc.),

— la conception et la vérification de protocoles de communication,

— la programmation de robots, de planification,

— la modélisation de propriétés et la vérification de programmes,

— la compression de textes,

— l'intelligence artificielle.

Même si les automates sont très anciens et s'ils sont beaucoup utilisés en pratique de nos jours, ils constituent toujours un sujet étudié en recherche, en tant que tel ou comme outil de résolution de problème.

5. `fr.wikipedia.org/wiki/Automate_mecanique`

Première rencontre avec les automates

Dans ce qui suit, pour abréger, nous utilisons le terme automate pour automate à nombre fini d'états.

Un automate est représenté sous forme de graphe, dont les nœuds (cercles) représentent les états, les nœuds doubles les états accepteurs et les arcs (flèches) représentent les transitions ; voir figure 2. À l'intérieur du nœud, nous indiquons le nom de l'état. Un automate est caractérisé par un nombre fini d'états, un vocabulaire qui désigne des actions et des règles permettant de passer d'un état à un autre. Finalement, un automate est un quintuplet (ensemble d'états, un vocabulaire d'actions, un état initial, un nombre fini de règles de transition et un ensemble d'états accepteurs. D'autres automates, machines ne sont pas abordées dans ce livre : les automates à états finis avec vocabulaires d'entrée et de sortie comme les automates de Moore et de Mealy, les automates à piles en lien avec les grammaires hors contextes, les machines de Turing en lien avec les notions de calculabilité et de décidabilité.

Un langage est défini par un ensemble de symboles, de mots sur ces symboles et par une grammaire indiquant comment les mots peuvent être utilisés. Dans un compilateur, les mots du langage constituent un langage régulier et leur reconnaissance peut se faire par un automate à états fini.

Nous considérerons dans la suite quelques exemples d'automates.

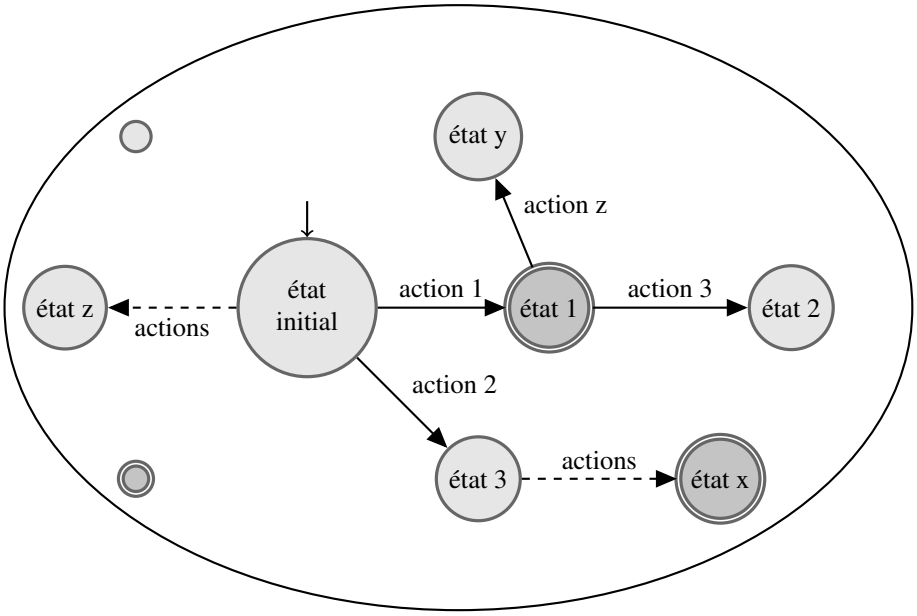


Figure 2 – Représentation schématique d'un automate.

Un automate reconnaissant la chaîne « abc »

Un premier exemple est un automate qui reconnaît une chaîne de caractères, mettons « abc ». Cet automate est représenté sur la figure 3. C'est un automate à quatre états : 0, 1, 2 et 3. Cet automate lit des mots (ou des phrases) sur l'alphabet latin. De l'état initial 0, par la lettre « a » on passe à l'état 1. De l'état 1, par « b », on va à l'état 2 et, de l'état 2, par la lettre « c », on va dans l'état 3, qui est un état accepteur. Tout ce qui n'est pas spécifié par l'automate conduit implicitement dans un état de rejet. Étant donné une séquence de symboles à lire, un automate lit chaque symbole, l'un après l'autre, dans l'ordre de la séquence. Au démarrage, avant de lire le premier symbole, un automate est dans son état initial.

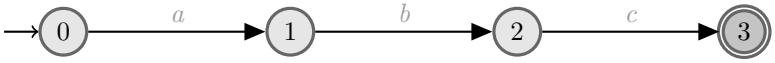


Figure 3 – Un automate lisant des mots sur l'alphabet latin et reconnaissant la chaîne « abc ».

Un automate reconnaissant les mots terminant par « ant »

Un second exemple d'automate est représenté dans la figure 4. Nous supposons pour simplifier que l'automate ne lit qu'un seul mot et doit déterminer si celui-ci termine par « ant », on dit dans ce cas que l'automate reconnaît ou accepte le mot. L'état initial rien vu est indiqué par une transition sans état de départ (flèche entrant dans le nœud rien vu). L'automate évolue d'état en état en fonction du symbole lu en entrée et de son état courant.

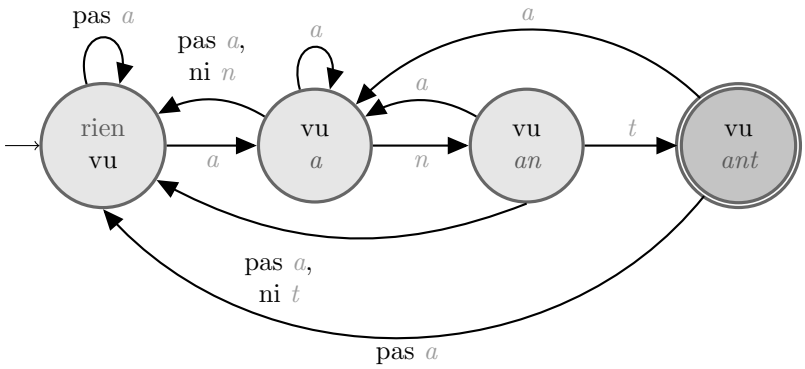


Figure 4 – Un automate lisant des mots sur l'alphabet latin et reconnaissant ceux qui terminent par « ant ».

— Depuis l'état rien vu, si le symbole lu est différent du symbole a alors l'automate reste dans l'état rien vu, sinon (si le caractère lu est a) alors l'automate va dans l'état vu a.

— Depuis l'état vu a, si le caractère lu est a alors l'automate reste dans l'état vu a, si le caractère lu est n alors l'automate va dans l'état vu an, sinon (si le caractère lu est ni a ni n), l'automate retourne dans l'état rien vu.

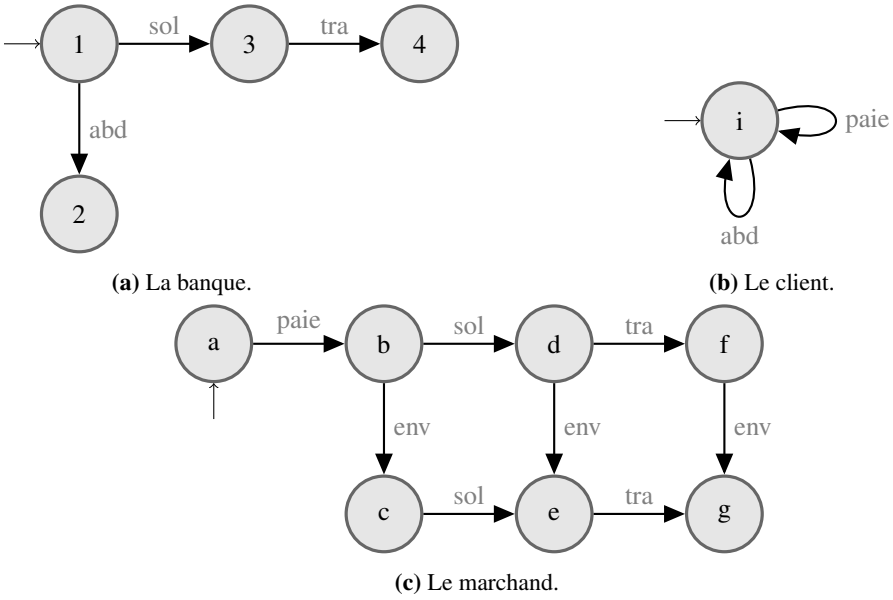
— Depuis l'état vu an, si le caractère lu est a alors l'automate retourne dans l'état vu a, si le caractère lu est t alors l'automate va dans l'état vu ant, sinon (si le caractère lu est ni a ni t), l'automate retourne dans l'état rien vu.

— Depuis l'état vu ant, si le caractère lu est a alors l'automate retourne dans l'état vu a, sinon (si le caractère lu n'est pas a) alors l'automate retourne dans l'état rien vu.

Si l'automate s'arrête dans l'état vu ant (qui est un état accepteur), alors l'automate accepte le mot. On remarque que les états de l'automate correspondent aux différentes situations dans la lecture caractère par caractère d'un mot par rapport au fait que ce mot termine par « ant ».

Des automates pour un protocole de transaction électronique

Nous modélisons une transaction électronique, avec comme entités un client, un marchand et une banque, inspiré de [10] ; voir figure 5. Nous considérons un protocole très simplifié, mais qui nous permet d'illustrer sa vérification automatisée.



(a) La banque.

(b) Le client.

(c) Le marchand.

Figure 5 – Automates pour le protocole de transaction électronique.

Les participants de la transaction. Le client veut acheter une marchandise chez le marchand et la paye de manière électronique.

— Les actions du client sont « payer la marchandise » (action paie) ou « abandonner la transaction et récupérer son argent » (action abd).

— Le marchand peut envoyer la marchandise (action env) et solder le paiement (action sol). Ces deux actions peuvent être effectuées dans n'importe quel ordre.

— La banque peut transférer l'argent au marchand (action tra).