Thierry Gourieux

Licence

Classes prépas

Cinématique et dynamique classiques du point matériel

Initiation à la mécanique de Newton

ellipses

CHAPITRE 1

RÉFÉRENTIELS
COORDONNÉES ET TRAJECTOIRES

1. Introduction. La *cinématique* s'intéresse à la description mathématique du mouvement des objets sans se préoccuper des causes qui les animent.

Point matériel. Nous étudierons ici la cinématique classique du *point matériel*. Celle d'un objet réel est un peu plus complexe car il faut aussi pouvoir préciser son orientation, ses déformations éventuelles, voire ses modifications internes tout au long du mouvement observé.
Un point matériel est un grain de matière modélisé par un point géométrique – objet mathématique sans dimension que l'on peut définir comme l'intersection de deux courbes – auquel est affecté un coefficient : la masse, qui prendra tout son sens en dynamique.
Ce point matériel ne peut pas être animé d'un mouvement de rotation sur lui-même en raison de la dimension 0 qui lui est attribuée. Ce type de mouvement se modélisera donc en associant plusieurs points matériels entre eux qui formeront l'objet en rotation.
Assimiler un objet à un seul point matériel pour étudier son mouvement peut être justifié ou non : cela dépend à la fois du type de mouvement que l'on souhaite décrire et des tailles caractéristiques de l'objet par rapport à celles de ce mouvement. Par exemple, si on s'intéresse au mouvement orbital de la Terre autour du Soleil, on peut assimiler la Terre à un point matériel avec une bonne précision puisque son rayon moyen ($6.37 \times 10^6\ m$) est suffisamment petit devant le rayon moyen de l'orbite terrestre ($1.49 \times 10^{11}\ m$). En revanche, l'approximation ne tient plus si on souhaite étudier le mouvement de rotation de la Terre sur elle-même.

Nature de l'espace et du temps physiques. Pour décrire le mouvement d'un point matériel, il faut pouvoir associer les notions de distance et de durées à des espaces mathématiques qui modélisent l'espace et le temps physiques.
Il est admis ici que nous possédons une connaissance empirique de ces notions : l'espace physique est constitué de trois dimensions spatiales (longueur, largeur et hauteur) et la géométrie euclidienne y est opérante[1]. La mesure des distances s'y

[1] À ce sujet : chapitre 1 du *Cours de physique de Berkeley* (vol. 1 – mécanique), M.A. Ruderman, C. Kittel, W.D. Knight, Ed. Dunod, 2001.

réalise pratiquement à l'aide d'une règle étalon (ancienne ou moderne comme les télémètres lasers).
Le temps quant à lui paraît s'écouler régulièrement, indépendamment de toute chose : on dit qu'il est *absolu*. On le représente par un paramètre t qui parcourt la droite des réels. Le temps ne s'observe pas en soi : il est toujours mesuré de façon indirecte en construisant par exemple des horloges au sein desquelles un phénomène périodique a lieu ; et c'est la détection - spatiale pour les horloges classiques, électronique pour les horloges quantiques d'aujourd'hui - de cette régularité qui fournira l'étalonnage de la droite temporelle.

Espace euclidien et temps absolu sont les hypothèses de la cinématique classique. Elles fournissent une description correcte des mouvements observés pour des vitesses faibles devant la vitesse de la lumière et dans l'approximation dite des champs gravitationnels faibles. Le fait expérimental que la vitesse de la lumière dans le vide ne soit pas infinie et qu'elle prenne le statut d'une constante fondamentale de la physique a initié les théories relativistes[1] (1905-1916), et on parle aujourd'hui d'espace-temps-matière.
Par ailleurs, la théorie quantique (1900-1926) donne à la notion classique de mouvement une interprétation statistique[2].
Les définitions actuelles des unités de temps et de longueur témoignent de ces bouleversements qui ont imprégné la physique aux débuts du XX^e^ siècle. L'unité internationale de temps est définie à l'aide de la physique atomique : la seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. L'unité de longueur, le mètre, est la distance parcourue dans le vide par la lumière pendant une durée de 1/299 792 458 de seconde.

2. Référentiel spatio-temporel. On dit qu'un objet est en mouvement lorsque sa position par rapport à d'autres objets change au cours du temps. Le besoin d'objets de référence pour décrire le mouvement d'un objet tiers est un constat expérimental : une voiturette fixée sur un manège en rotation par rapport au sol terrestre est aussi

---

[1] En relativité restreinte (c'est-à-dire en l'absence de champ gravitationnel), l'espace physique est un espace-temps à 4 dimensions : le temps en effet n'est pas absolu ; les durées écoulées et les distances mesurées dépendent du référentiel (voir la section 2) vis-à-vis duquel on décrit le mouvement. La présence de matière (relativité générale) déforme cet espace-temps et la géométrie euclidienne n'y est plus opérante.

[2] En mécanique quantique, la position x d'un point matériel de masse m et sa vitesse v ne sont définies qu'à des incertitudes Δx et Δv près satisfaisant à chaque instant l'inégalité de Heisenberg (1926) : $\Delta x\ \Delta v \geq \hbar/2m$ où $\hbar$ (« h barre ») est la constante de Planck (1900), $h = 6.023 \times 10^{-34}\ J.s$, divisée par 2π. La théorie quantique fut construite sur la base de faits expérimentaux relevant des propriétés physiques des corps, de la structure interne des atomes, et de leurs interactions avec la lumière.

en rotation ; mais du point de vue du manège elle est au repos. Et le sol terrestre est en rotation par rapport au manège ou à la voiturette.

Une fois l'objet de référence adopté, décrire le mouvement d'un point matériel consiste à pouvoir le situer relativement à cet objet, à chaque instant. L'objet de référence et le dispositif mis en place pour pouvoir réaliser ces exigences constituerons un *référentiel spatio-temporel*.

Du point de vue spatial, on choisit d'abord un point géométrique O fixe par rapport à l'objet de référence ; ce point fera office d'origine. Puis, on choisit 3 axes fixes également (non parallèles entre eux et non coplanaires), qui passent par O, et qui vont permettre de repérer le point matériel M vis-à-vis de O. Le plus simple est de choisir ces axes perpendiculaires entre eux : le premier sera dénommé axe Ox, le second Oy, le troisième Oz. Ces 3 axes sont orientés et supposés être étalonnés à l'unité de mesure des distances.
Ce faisant, on dira que l'objet de référence $\mathcal{R}$ et le point O accompagné de ses 3 axes primaires forment le référentiel spatial $\mathcal{R}\{O, xyz\}$ par rapport auquel sera décrite la position de M.

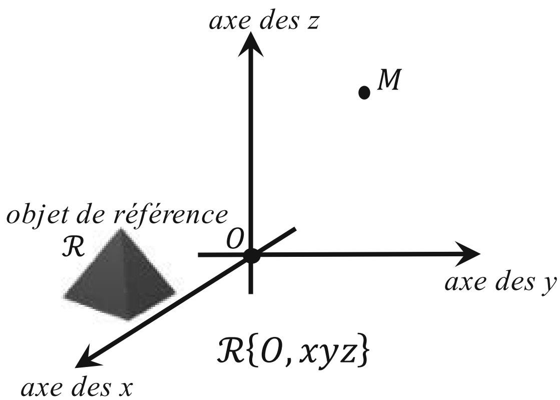

Figure 1. Le référentiel spatial $\mathcal{R}\{O, xyz\}$. En munissant ce référentiel d'une horloge, on obtient un référentiel spatio-temporel dont l'utilité sera de pouvoir situer à chaque instant le point matériel M par rapport à O.

Il faut maintenant introduire une référence temporelle dans cette construction afin de pouvoir dater les différentes positions du point M. Cette référence temporelle est universelle, indépendante du référentiel spatial, puisque nous avons opté pour un temps absolu. En munissant le référentiel spatial d'une horloge, on aura ainsi construit un référentiel spatio-temporel $\mathcal{R}\{O, xyz\,; t\}$ qui sera le plus souvent appelé : référentiel $\mathcal{R}$. Un référentiel différent sera noté $\mathcal{R}'\{O', x'y'z'\,; t\}$ ou encore

$\mathcal{R}'$: le « prime » indiquant que l'objet de référence a changé, ainsi que l'origine et les axes de référence… mais pas le temps[1].

3. Coordonnées spatiales. On donne le nom de *coordonnées* aux nombres qui servent à situer un point M au sein d'un référentiel.

Coordonnées cartésiennes. Donnons-nous 3 nombres x, y et z que nous appellerons *coordonnées cartésiennes* du point M relativement au référentiel $\mathcal{R}\{O, xyz\,; t\}$. Ces coordonnées permettront de situer M de la façon suivante : depuis O, on se déplace de x fois la longueur unité le long de l'axe Ox, puis de y fois parallèlement à l'axe Oy, enfin de z fois parallèlement à l'axe Oz : le point M est là (figure 2).
Afin de pouvoir repérer n'importe quel point de l'espace par ce moyen, chacune des coordonnées cartésiennes x, y et z doit pouvoir varier dans l'intervalle $]-\infty, +\infty[$. On a coutume d'appeler x l'*abscisse* du point M, y son *ordonnée* et z sa *cote*.

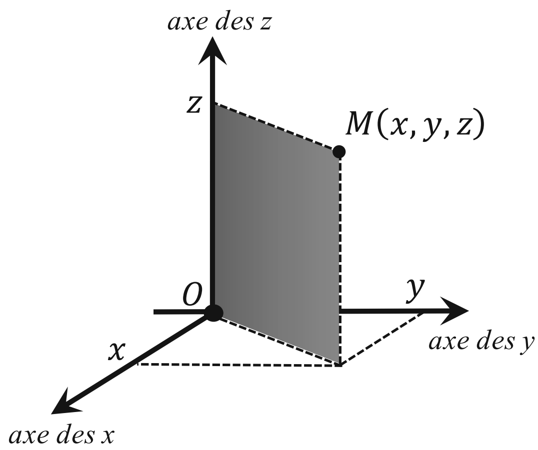

Figure 2. Coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M.

Coordonnées sphériques. La façon qui vient d'être adoptée pour connaître la position du point M au sein du référentiel $\mathcal{R}$ n'est pas la seule. On aurait pu décider par exemple de repérer ce point par 3 autres nombres r, θ et φ en procédant de la façon suivante : depuis O, on se déplace de r fois la longueur unité le long de l'axe Oz ; puis on effectue une rotation d'angle θ autour de l'axe Oy dans le plan zOx ; on effectue ensuite une deuxième rotation d'angle φ autour de l'axe Oz parallèlement au plan xOy : le point M est là (figure 3).

[1] On peut quand même se permettre une désynchronisation, c'est-à-dire un nouveau temps $t' = t + \tau$ où τ est une durée constante.

Cette autre façon de procéder est équivalente à la première puisque, au bout du compte, nous avons pu situer le point M dans l'espace relativement au référentiel $\mathcal{R}$. Les 3 nombres r, θ et φ sont appelés *coordonnées sphériques* du point M. Pour pouvoir repérer n'importe quel point à l'aide de ces 3 nouveaux nombres et pour que la correspondance soit bi-univoque, c'est à dire pour qu'à un point M donné corresponde un unique triplet (r, θ, φ), on doit restreindre leur domaine de variation : r est choisi positif dans l'intervalle $[0, +\infty[$ et symbolise la distance qui sépare l'origine O du point M. L'angle θ, dénommé *colatitude*, est l'angle que fait la droite (OM) avec l'axe Oz ; il varie dans l'intervalle $[0, \pi]$. L'angle φ, dénommé *longitude*, est l'angle que fait le plan $\big(Oz, (OM)\big)$ avec l'axe Ox, il varie dans l'intervalle $[0,2\pi[$.

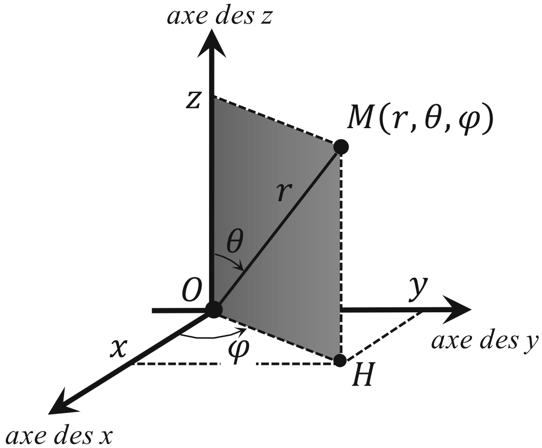

Figure 3. Coordonnées sphériques (r, θ, φ) du point M.

Des relations mathématiques permettent de passer des coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M à ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) et *vice versa*. En faisant un peu de géométrie, on démontre les formules suivantes à l'aide de la figure 3 ci-dessus (voir le **C5**) :

$$x = r\, sin\theta\, cos\varphi \quad ; \quad y = r\, sin\theta\, sin\varphi \quad ; \quad z = r\, cos\theta$$

Autres systèmes de coordonnées. Il existe un nombre indéfini de systèmes de coordonnées : elliptiques, hyperboliques, obliques, etc… Du point de vue pratique, on se doit de connaître les 4 systèmes de coordonnées les plus courants : coordonnées cartésiennes, sphériques et cylindriques (définies au **C4**) pour le mouvement dans l'espace, ainsi que les coordonnées polaires (définies au **C3**) pour le mouvement dans un plan.

Le choix d'un système de coordonnées est souvent guidé par ce que l'on appelle la symétrie du problème : si, par exemple, il existe un axe de symétrie, alors il sera bienvenu d'utiliser des coordonnées cylindriques, car la description du mouvement s'en trouvera plus claire et les calculs à réaliser plus simples que si l'on avait fait un autre choix de coordonnées. De même, s'il existe une symétrie par rapport à un point (un centre de symétrie), ce sont les coordonnées sphériques qu'il sera préférable d'utiliser. En l'absence de toute symétrie visible, on recommande souvent de choisir les coordonnées cartésiennes.

Avertissements. Les coordonnées du point matériel sont appelées à dépendre du temps t. Ainsi, si le choix s'est porté sur les coordonnées cartésiennes, on devrait écrire :

$$x = f(t) \quad ; \quad y = g(t) \quad ; \quad z = h(t)$$

où f, g et h sont des fonctions de t. Toutefois, l'usage est très souvent pris en physique d'employer une notation abusive en omettant les fonctions f, g, h et en écrivant à la place : $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$; c'est-à-dire que l'on assigne à la fonction la même lettre que sa valeur à l'instant t.

On prend aussi l'habitude de ne pas écrire la dépendance temporelle de ces coordonnées, mais d'écrire : x ; y ; z, où il est sous-entendu que ces coordonnées dépendent du temps. Sauf mention contraire, on devra donc toujours considérer que (x, y, z) sont les coordonnées instantanées (c'est-à-dire à l'instant t) du point M.

4. Trajectoires. Dans son mouvement au cours du temps, le point matériel M passe par une succession de points géométriques fixes[1] du référentiel $\mathcal{R}$ qui forment une courbe appelée *trajectoire* du point M (figure 4). Cette courbe est caractérisée par une ou plusieurs relations existant à chaque instant entre les coordonnées de ce point : ce sont les *équations de la trajectoire* ou de la courbe. Connaître la trajectoire suivie par le point M, c'est connaître la ou les relations qui relient les coordonnées de ce point entre elles.

Exemple à deux dimensions. En coordonnées cartésiennes (x, y), l'équation d'une trajectoire rectiligne est : $y = a\,x + b$, où a et b sont deux constantes. En coordonnées polaires (**C3**) (r, θ), cette même trajectoire sera déterminée par l'équation : $r\,(sin\theta - a\,cos\theta) = b$ qui relie r et θ à chaque instant.

Exemples à trois dimensions. En coordonnées cartésiennes (x, y, z), les deux équations : $y = a\,x + b$ et $z = c\,x + d$, où a, b, c, d sont des constantes, forment les équations d'une trajectoire rectiligne.

En coordonnées cylindriques (**C4**) (ρ, φ, z), les deux équations $\rho = R$ et $z = A\,\varphi$, où R et A sont deux constantes, sont les équations d'une hélice circulaire.

---

[1] Le point géométrique fixe P du référentiel qui coïncide à l'instant t avec le point matériel M en mouvement est appelé *point coïncident* (figure 4).

Les trajectoires possibles d'un point matériel se rangent dans trois grandes classes : les trajectoires ou courbes rectilignes, c'est-à-dire les droites ; les trajectoires ou courbes planes, c'est-à-dire les courbes qui sont entièrement contenues dans un plan ; les trajectoires ou *courbes gauches*, c'est-à-dire les courbes qui ne sont pas planes.

Équations paramétriques ou horaires de la trajectoire. Dans les exemples précédents, le temps t n'apparaissait pas explicitement. En effet, il n'est pas nécessaire de connaître $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ [ou bien $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$, etc…] pour obtenir la trajectoire suivie par le point M puisqu'il suffit de connaître les relations qui existent entre x, y et z [ou bien r, θ et φ, etc…]. Toutefois, une description complète du mouvement nécessite de savoir de quelle façon le point M parcourt cette trajectoire au cours du temps. La connaissance de x, y et z [ou bien r, θ et φ, etc…] en fonction du temps est alors indispensable.
Les relations qui donnent l'expression des coordonnées du point M en fonction du temps sont dénommées *équations paramétriques* (le paramètre est le temps t) *ou horaires de la trajectoire.* Par exemple, les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x = v\,t \\ y = a\,v\,t + b \end{cases}$$

où a, b, v sont des constantes, sont les équations paramétriques de la trajectoire du point M de coordonnées cartésiennes $(x(t),\ y(t))$. Si on élimine le temps de ces équations horaires, on obtient l'équation de la trajectoire : $y = a\,x + b$.

Enfin, d'après la connaissance empirique que nous en avons, le paramètre temps ne peut que croître. Cela impose une orientation naturelle à la trajectoire qui correspond au sens de parcours selon lequel le point matériel décrit cette courbe (figure 4).

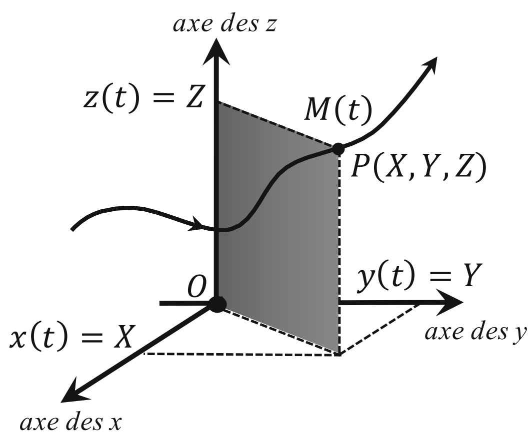

Figure 4. La trajectoire orientée du point M et sa coïncidence à l'instant t avec le point géométrique fixe P du référentiel $\mathcal{R}\{O, xyz\,; t\}$.

Compléments et exercices du chapitre 1

C1. Référentiels équivalents. Dans la construction de notre référentiel à la section **2**, le choix de l'origine O était arbitraire pourvu que ce point origine soit fixe vis-à-vis de l'objet de référence $\mathcal{R}$. Les axes primaires fixes Ox, Oy et Oz ont eux aussi été choisis de façon arbitraire mais orthogonaux entre eux.
Le choix d'un autre point origine A fixe par rapport à l'objet de référence et de trois autres axes fixes, non parallèles entre eux et non coplanaires Ax_1, Ax_2 et Ax_3 formerait de toute évidence un référentiel $\mathcal{R}\{A, x_1x_2x_3\,; t\}$ tout aussi valable que le référentiel $\mathcal{R}\{O, xyz\,; t\}$ pour décrire le mouvement d'un point matériel vis-à-vis de l'objet de référence. En effet, de façon générale, tant que l'objet de référence n'a pas été remplacé par un autre objet de référence en mouvement par rapport au premier, la courbe suivie par le point matériel sera la même ; simplement, elle sera décrite de façon différente. On dira donc de ces deux référentiels qu'ils sont équivalents.
Avec la philosophie adoptée à la section **2**, on peut convenir d'adopter $\mathcal{R}\{O, xyz\,; t\}$ comme le référentiel primaire à partir duquel on peut construire un autre référentiel équivalent tel que $\mathcal{R}\{A, x_1x_2x_3\,; t\}$ (voir aussi le **C15**). $\mathcal{R}\{O, xyz\,; t\}$ est en quelque sorte un représentant de toute la classe de ces référentiels équivalents.

C2. Dimensions des coordonnées. En toute rigueur, une coordonnée, quelle qu'elle soit, n'a pas de dimensions[1] physiques : c'est un nombre. Les dimensions et les unités auxquelles se réfèrent les coordonnées sont déclarées au départ : par exemple, x se rapporte à « $x\ fois$ » la longueur unité le long de l'axe Ox. Toutefois, par abus de langage, on finit par dire « x *mètres* » si la longueur unité est le mètre.

Un angle est un secteur du plan délimité par deux droites sécantes en l'origine O du plan. Ce nombre est compris entre 0 et 2π. Bien qu'il soit sans dimension, on a coutume de préciser que ce nombre est exprimé en radians (rad). La raison en est que l'usage pratique de la mesure des angles a donné lieu à l'invention d'unités comme le degré.

C3. Coordonnées polaires. Si le mouvement a lieu dans un plan, on se réfère souvent aux *coordonnées polaires* (r, θ) du point M. La coordonnée r symbolise la distance du point origine O au point M ; elle varie dans l'intervalle $[0, +\infty[$. L'angle θ, appelé *angle polaire*, est l'angle entre la droite (OM) et l'axe Ox ; il varie dans l'intervalle $[0, 2\pi[$. En utilisant les propriétés des triangles rectangles visibles sur la figure 5, on obtient les relations entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes (x, y) de M :

[1] Les grandeurs physiques, leurs dimensions et leurs unités sont discutées plus en détail au **C44** (chapitre 9).