

Olivier Marchal

Cours et exercices corrigés de statistiques inférentielles

2^e édition



ellipses

Table des matières

I	Généralités	9
1	Les grands problèmes en statistiques inférentielles	9
1.1	Modélisation paramétrique	9
1.2	Les différentes problématiques à résoudre	11
2	Quelques exemples et modèles standards	12
2.1	Lancers d'une pièce de monnaie	12
2.2	Lancers d'un dé	13
2.3	Le modèle gaussien	14
2.4	Un modèle discret	15
3	Conclusion du chapitre	16
II	Estimation de paramètres	17
1	Propriétés souhaitées pour un estimateur	17
1.1	Estimateurs sans biais	19
1.2	Estimateurs convergents	21
1.3	Estimateurs asymptotiquement normaux	24
1.4	Estimateurs efficaces	28
1.5	Robustesse	31
2	Exemple sur le modèle uniforme continu	31
2.1	Étude de \hat{a}_n et \hat{b}_n	33
2.2	Étude de \tilde{a}_n et \tilde{b}_n	36
2.3	Simplification au cas $\mathcal{U}([0, b])$	39
3	Exercices	39
III	Estimation du maximum de vraisemblance et méthode des moments	43
1	La méthode des moments	43
1.1	Exemple sur le modèle gaussien	44

1.2	Exemple sur le modèle uniforme	44
1.3	Exemple avec des équations non indépendantes	45
1.4	Limites de la méthode des moments	46
2	L'estimateur du maximum de vraisemblance	47
2.1	Vraisemblance sur un modèle discret	47
2.2	Estimateur du maximum de vraisemblance	51
2.3	Exemple d'EMV sur le modèle exponentiel	52
2.4	Exemple d'EMV sur le modèle gaussien	53
2.5	EMV dans le modèle uniforme	55
2.6	EMV dans le modèle de Poisson	56
2.7	EMV implicite : cas de la loi de Cauchy	57
3	Conclusion	58
4	Exercices	59
IV	Exhaustivité et information de Fisher	61
1	Statistiques exhaustives	61
1.1	Définition	61
1.2	Exemple sur des tirages à pile ou face	62
1.3	Théorème de factorisation de Fisher-Neyman	63
1.4	Exemple sur le modèle gaussien	65
1.5	Exemple sur le modèle de Bernoulli	66
1.6	Cas des modèles dits exponentiels	66
2	Construction d'estimateurs sans biais efficaces	69
2.1	Théorème de Rao-Blackwell	69
2.2	Complétude et estimateur efficace	72
3	Information de Fisher	76
3.1	Cas des modèles unidimensionnels	76
3.2	Généralisation aux modèles multi-dimensionnels	83
4	Exercices	85
V	Intervalles de confiance	89
1	Régions et intervalles de confiance	89
2	Intervalles de confiance du modèle gaussien	91
2.1	Construction de l'intervalle de confiance sur la moyenne	92
2.2	Intervalle de confiance sur la variance	95
2.3	Intervalle de confiance sur la différence de deux moyennes	96
3	Intervalles de confiance du modèle exponentiel	97
4	Intervalles de confiance asymptotiques	99

4.1	Intervalles de confiance asymptotiques pour le modèle exponentiel	101
4.2	Intervalles de confiance asymptotiques pour le modèle de Bernoulli	102
5	Exercices	105
VI	Tests d'hypothèses	107
1	Définition d'un test binaire d'hypothèses	107
1.1	Définition générale d'un test binaire d'hypothèses	107
1.2	Types d'erreur et p -valeur d'un test d'hypothèses	108
2	Tests d'hypothèses associés au modèle gaussien	111
2.1	Test de comparaison de la moyenne à une valeur donnée	111
2.2	Test de comparaison de la variance à une valeur donnée	113
2.3	Test de comparaison de deux moyennes	113
2.4	Cadre asymptotique et approximation gaussienne	116
3	Test asymptotique sur une proportion	117
4	Test d'adéquation à une loi discrète	118
5	Test d'indépendance de deux variables discrètes	119
6	Test d'adéquation à une loi continue	121
7	Tests non paramétriques	122
7.1	Test de Wilcoxon	124
7.2	Test exact de Fisher	125
7.3	Autres tests	126
8	Exercices	126
VII	Régression linéaire	129
1	Régression linéaire simple	129
1.1	Présentation du modèle gaussien sous-jacent	129
1.2	Estimation des paramètres	131
1.3	Coefficient R de la régression	138
1.4	Intervalles de confiance et de prédiction	138
1.5	Tests sur les paramètres	140
2	Régression linéaire multiple	144
2.1	Cadre général et notations	144
2.2	Estimation par la méthode des moindres carrés	145
2.3	Estimateur du maximum de vraisemblance	147
2.4	Intervalles de confiance sur les paramètres	149
2.5	Tests sur les régresseurs	150

2.6	Utilisation de la régression linéaire multiple	152
3	Exercices	153
VIII	Solutions des exercices	157
1	Estimation de paramètres	157
2	EMV et méthode des moments	164
3	Exhaustivité, efficacité et information de Fisher	174
4	Intervalle de confiance	184
5	Tests d'hypothèses	189
6	Régression linéaire	192
Annexe A	Loi normale et ses dérivées	199
1	Variables gaussiennes et vecteurs gaussiens	199
1.1	Variables aléatoires gaussiennes	199
1.2	Vecteurs gaussiens	203
2	Lois du χ^2	209
3	Lois de Student	211
4	Lois de Fisher	214
Annexe B	Théorème de Cochran	219
1	Énoncé et démonstration	219
2	Applications du théorème au modèle gaussien	222
2.1	Intervalle de confiance sur la moyenne dans le modèle gaussien	222
2.2	Intervalle de confiance sur la variance dans le modèle gaussien	224
2.3	Intervalle de confiance sur la différence de deux moyennes dans le modèle gaussien	224
2.4	Régression linéaire simple	228
2.5	Régression linéaire multiple	232
	Bibliographie	237
	Index	239