Introduction à la mécanique des solides

Cours et exercices corrigés

Introduction à la mécanique des solides

Cours et exercices corrigés

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

Illustration de couverture : © Wright Out There - Shutterstock.com

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082664-3

Table des matières

Avant-propos XI

1 Notions préliminaires de mécanique des solides indéformables 1

1. Notions de système matériel, de solide et de point matériel 2
1.1. Système matériel 2
1.2. Solide 2
1.3. Point matériel 2

2. Trièdres, bases, repères 3
2.1. Repérage d'un point 3
2.2. Vitesse et accélération d'un point 4

3. Calcul des vecteurs vitesse 6
3.1. Calcul de la vitesse dans R 6
3.2. Calcul de la vitesse dans R_1 7
3.3. Relation entre les vecteurs vitesse 7

4. Action mécanique 9
4.1. Définitions 9
4.2. Action mécanique de contact 10
4.3. Action mécanique à distance 14

5. Les lois fondamentales de la mécanique - interaction 15
5.1. Principe d'inertie - 1re loi de Newton 15
5.2. Principe fondamental de la dynamique - 2e loi de Newton 16
5.3. Actions réciproques - 3e loi de Newton 17

6. Énergie cinétique, énergie potentielle, énergie mécanique d'un point matériel 18
6.1. Travail d'une force 18
6.2. Énergie mécanique 20
6.3. Exemple d'utilisation de l'énergie pour la résolution d'un problème 23

L'essentiel 25

Entraînez-vous 27

Solutions 33

2 Cinématique des solides indéformables 41

1. Définitions 41
1.1. Définition d'un solide indéformable 41

1.2. Espace 42
1.3. Notion de référentiel d'espace 42

2. Vitesse et accélération des points d'un solide 43
2.1. Angles d'Euler 43
2.2. Champ des vitesses dans un solide 45
2.3. Équiprojectivité 46
2.4. Exemple 46
2.5. Champ des accélérations 49

3. Composition des mouvements 49
3.1. Composition des vecteurs vitesse 49
3.2. Composition des vecteurs rotation 50
3.3. Composition des torseurs cinématiques 51
3.4. Vitesse de glissement 51
3.5. Composition des accélérations 52

4. Mouvement plan sur plan 54
4.1. Définition 54
4.2. Détermination du point I 55
4.3. Propriétés de la base et de la roulante 55

5. Liaisons : aspects cinématiques 56
5.1. Liaison ponctuelle 57
5.2. Liaison linéaire rectiligne 58
5.3. Liaison linéaire annulaire 59
5.4. Liaison rotule 60
5.5. Liaison appui plan 61
5.6. Liaison pivot glissant 62
5.7. Liaison pivot 63
5.8. Liaison glissière 64
5.9. Liaison hélicoïdale 65
5.10. Liaison encastrement 66

6. Schématisation des systèmes mécaniques 67
6.1. Graphe des liaisons, des actions mécaniques 67
6.2. Schéma cinématique 68

L'essentiel 70

Entraînez-vous 72

Solutions 77

3 Statique des solides indéformables 81

1. Action mécanique 82
1.1. Actions extérieures / actions intérieures 82

1.2. Force et moment 83
1.3. Torseur des actions mécaniques 83
1.4. Action mécanique de contact 84
1.5. Action mécanique à distance 85
1.6. Actions de liaison 87

2. Principe fondamental de la statique 94
2.1. Équilibre statique 94
2.2. Énoncé du principe fondamental de la statique (PFS) 94
2.3. Théorème de la résultante et théorème du moment résultant 95
2.4. Théorème des actions réciproques 95

3. Analyse des mécanismes 98
3.1. Liaison équivalente (liaisons en parallèle et liaisons en série) 99
3.2. Hyperstatisme et mobilité 101
3.3. Étude des chaînes de solides parfaits (chaîne fermée, chaîne ouverte) 102

L'essentiel 106

Entraînez-vous 109

Solutions 117

4 Cinétique des solides indéformables 131

1. Torseur cinétique 132
1.1. Quantité de mouvement 132
1.2. Moment cinétique 132
1.3. Torseur cinétique au centre de masse 133
1.4. Exemple : torseur cinétique d'une tige 134
1.5. Moment cinétique par rapport à un axe 135

2. Moments et opérateur d'inertie 136
2.1. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un plan 136
2.2. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe 137
2.3. Additivité 139
2.4. Moment d'inertie d'un solide par rapport à un point 139
2.5. Opérateur d'inertie d'un solide 140
2.6. Calcul de la matrice d'inertie 141
2.7. Exemple : matrice d'inertie d'un cylindre 142

3. Symétries matérielles et axes principaux d'inertie 145
3.1. Symétries 145
3.2. Axes principaux d'inertie 146
3.3. Exemples 151

4. Théorèmes des axes parallèles (Huygens) 153
4.1. Théorème de Huygens 153
4.2. Généralisation : Théorème de Huygens-Steiner 155

5. Calcul du moment cinétique d'un solide 156
5.1. Cas général 156
5.2. Mouvement plan sur plan 157

6. Énergie cinétique d'un solide 158

L'essentiel 160

Entraînez-vous 163

Solutions 166

5 Dynamique des solides indéformables 175

1. Torseur dynamique 176
1.1. Définition 176

2. Relation entre le torseur cinétique et le torseur dynamique 176

3. Principe fondamental de la dynamique (PFD) 179
3.1. Énoncé 179
3.2. Théorèmes dynamiques 179
3.3. Théorème des actions réciproques 180
3.4. Exemple : boule sur piste circulaire 181

4. Principe fondamental de la dynamique en repère non galiléen 184

5. Application du PFD. Retour sur l'exercice : métronome de secours 185

6. Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à un système en rotation 187
6.1. Calculs préliminaires 187
6.2. Application du PFD 188
6.3. Équilibrage statique 189
6.4. Équilibrage dynamique 189

7. Théorèmes énergétiques 190
7.1. Généralités 190
7.2. Puissance des actions mécaniques exercées sur un solide 191
7.3. Puissance des actions mutuelles entre deux solides 192
7.4. Travail 193
7.5. Énergie potentielle 193
7.6. Théorème de l'énergie cinétique 196
7.7. Intégrale première de l'énergie cinétique 199

L'essentiel 203

Entraînez-vous 206

Solutions 213

Annexe

A Produit scalaire et produit vectoriel 225

B Propriétés des torseurs 227

1. Champ de vecteurs antisymétriques 227
2. Vecteurs liés, libres 228
3. Champ de moment 228
3.1. Éléments de réduction d'un torseur 230
3.2. Opérations sur les torseurs 230
3.3. Glisseur 230
3.4. Couple 231
3.5. Décomposition d'un torseur 231
4. Axe d'un torseur 231

C Unités 233

1. Unités du Système International 233
2. Unités dérivées du système international 234

Bibliographie 237

Index 239

Avant-propos

Cette troisième version de l'ouvrage consacré à la mécanique du solide indéformable (parfois appelée mécanique du solide rigide) correspond à un remaniement important de la structure avec une ré-écriture des trois premiers chapitres, l'ajout de plusieurs exercices avec des corrections plus détaillées.

Le chapitre *Quelques éléments de la mécanique du solide* nous permet de définir l'objet d'étude, à savoir le système matériel, avec ses variantes : isolé, pseudo-isolé, fermé ou ouvert. Ce dernier cas, courant en mécanique des fluides, n'est pas traité ici.

Les notations, les notions de repère, de référentiel et de base permettent de manipuler les vecteurs vitesse et accélération d'un point. Nous présentons les actions mécaniques et leur modélisation vectorielle avec quelques éléments relatifs au frottement entre solides.

Ce chapitre se termine par les lois de Newton et les notions délicates d'énergies cinétique, potentielle ou mécanique qui sont fondamentales pour comprendre et utiliser le théorème de l'énergie cinétique.

La *Cinématique du solide indéformable* peut être efficacement décrite par la cinématique d'un des points de ce solide (par exemple son centre de masse) et les rotations du solide. C'est ainsi que nous arrivons aux notions d'angles d'Euler et de vecteur vitesse de rotation spécifiques à la mécanique des solides indéformables. Le torseur des vitesses sera défini ; c'est un outil très utilisé en France, inconnu partout ailleurs, qui a l'avantage de structurer - et d'unifier - la présentation générale. L'équiprojectivité du champ des vitesses découle de la relation entre les vitesses de deux points d'un solide mais elle peut aussi servir pour définir complètement ce champ des vitesses. Des applications dans le cas particulier de mouvements plan sur plan sont incluses dans ce chapitre avec la description du mouvement - dans ce cas précis - comme une combinaison de vitesses de rotations instantanées autour d'un point I, mobile au cours du temps, appelé centre instantané de rotation.

À ce stade il est naturel de s'intéresser aux mouvements relatifs de deux solides liés par ce que l'on appelle une liaison mécanique, laquelle autorise (ou pas) certains mouvements. Nous donnons quelques exemples pour chaque type de liaison et construisons le torseur cinématique de chacune d'elle.

Une fois que la modélisation mathématique de la cinématique est installée, il est possible de s'intéresser à la description des actions mécaniques entre solides et à leur équilibre. C'est l'objet du chapitre *Statique des solides*. Il nous faut pour cela reprendre les actions à distance, de contact et en proposer une modélisation cohérente avec la mécanique des solides indéformables. Cette cohérence impose de considérer la notion de résultante mais aussi de moment en un point ce qui définit un torseur d'actions mécaniques.

Il devient alors possible de balayer les liaisons mécaniques et de compléter leur description par les torseurs d'actions transmissibles entre solides dans le cas d'un contact parfait (pas de frottement ou avec frottement mais dans le cas du roulement sans glissement ce qui est le cas dans un roulement à billes). Le cas du contact non parfait est traité dans quelques cas particuliers sachant que cela complique sérieusement les calculs (surtout en dynamique).

Les deux théorèmes de la résultante et du moment ainsi que celui des actions réciproques (issus du principe fondamental de la statique) fournissent les équations nécessaires à la résolution d'un problème de statique des solides indéformables.

Ce chapitre se termine par une courte description des liaisons (parallèle ou série) de solides avec les chaînes dites ouvertes, fermées ou complexes.

La *Cinétique du solide indéformable* est un chapitre de transition, technique, qui donne l'occasion de mettre en place l'opérateur d'inertie et la matrice d'inertie. Nous débutons par la construction du torseur cinétique - dans la lignée des torseurs cinématique et d'actions mécaniques - constitué de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Nous montrons que l'utilisation du centre de masse (confondu avec le centre de gravité dans le cadre des applications présentées) permet de simplifier l'expression de la quantité de mouvement que nous pouvons calculer uniquement en connaissant la vitesse de ce point.

Les moments d'inertie d'un solide par rapport à un plan, à un axe ou à un point sont présentés. En reprenant le calcul du moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe quelconque, il est possible, après manipulations, de faire apparaître ce que l'on appelle l'opérateur d'inertie caractérisé par sa matrice dans une base de travail. Il faut alors se familiariser avec cette matrice d'inertie en la calculant pour un certain nombre de solides simples (cylindres à base circulaire ou non, sphère, disque...). Nous nous intéressons aux axes principaux d'inertie et aux valeurs propres associées, ce qui simplifiera les calculs. Cet opérateur d'inertie peut alors être utilisé dans la définition du moment d'inertie pour montrer qu'il y a deux contributions, l'une dépendant de la vitesse du point de calcul et de celle du centre de masse et l'autre de cet opérateur d'inertie. De nombreux exemples montreront l'intérêt de cette présentation. Nous terminons ce chapitre par la définition et le calcul de l'énergie cinétique d'un solide en mouvement.

La *Dynamique des solides* débute de façon logique par la présentation du torseur dynamique. De la même façon que pour le torseur cinétique, nous montrons que le centre de masse permet de simplifier l'expression de la résultante dynamique. Le moment dynamique, quant à lui, est calculé à partir du moment cinétique pour aboutir à une formule de même structure.

Le principe fondamental de la dynamique est présenté avec les applications en repère galiléen ou non galiléen. Nous expliquons comment équilibrer - statiquement et dynamiquement - un solide en rotation, ce qui est d'intérêt pratique dans de nombreuses situations.

Enfin le théorème de l'énergie cinétique dans le cas général de solides en liaisons parfaites ou non, permet de retrouver de façon simple et automatique les équations de mouvements du système étudié, équations que l'on obtient *via* le principe fondamental de la dynamique mais de manière plus complexe.

Des annexes complètent cet ouvrage pour donner des précisions sur les produits scalaire et vectoriel, sur les torseurs et enfin sur les unités.

Chapitre 1

Notions préliminaires de mécanique des solides indéformables

Introduction

Cette partie a pour objectif de rappeler certaines notions importantes de la mécanique du point, où le solide est assimilé à un point matériel (sans dimension). Il faut la considérer comme une transition entre ce domaine, étudié au lycée principalement et en première année universitaire, et la mécanique des solides indéformables qui, elle, se traite bien souvent dès la deuxième année universitaire. Une description plus complète et approfondie de la mécanique du point est proposé - par exemple - dans l'ouvrage d'Henry et Delorme [1].

Nous décrirons les différents systèmes de coordonnées utilisés, mettrons en place la notion de vecteur vitesse dans un référentiel puis les actions mécaniques (de contact, à distance) avec les aspects de frottement entre solide. C'est à ce stade que nous pouvons énoncer les lois de Newton sous la forme du principe d'inertie, du principe fondamental de la dynamique puis des actions réciproques.

Nous terminons ce chapitre introductif par les notions d'énergies (potentielle, cinétique, mécanique) puis par une présentation du théorème de l'énergie cinétique.

Objectifs

Isoler un système d'étude.

Énoncer les lois fondamentales de la mécanique d'un point matériel.

Énoncer les théorèmes énergétiques d'un point matériel.

Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel.

Plan

1. Notions de système matériel, de solide et de point matériel
2. Trièdres, bases, repères
3. Calcul des vecteurs vitesse
4. Action mécanique
5. Les lois fondamentales de la mécanique - interaction
6. Énergie cinétique, énergie potentielle, énergie mécanique d'un point matériel

1 Notions de système matériel, de solide et de point matériel

1.1 Système matériel

Le système matériel ou physique constitue l'ensemble des objets auxquels on s'intéresse et dont on veut étudier les propriétés.

Cette idée revient à séparer le monde en deux parties : celle qui nous intéresse (interne) de celle qui ne nous intéresse pas (externe). Selon la nature de l'interaction entre ces deux parties du monde, on peut parler de système matériel :

- isolé : système qui n'interagit pas avec l'extérieur (pas d'échange d'énergie, ni de matière) ;
- pseudo-isolé : système dont les actions extérieures agissant sur lui se compensent (tout se passe comme s'il était isolé). Par exemple, un mobile autoporteur sur un plan horizontal est pseudo-isolé : la soufflerie du mobile compense le poids et le mobile se déplace sur le plan horizontal comme s'il était isolé ;
- fermé : système qui n'échange pas de matière avec l'extérieur mais peut échanger de l'énergie ;
- ouvert : système qui échange de la matière avec l'extérieur.

Dans le cadre de ce chapitre, nous nous intéresserons quasiment exclusivement au cas des systèmes matériels isolés ou pseudo-isolés.

1.2 Solide

Dans ce livre, le système matériel d'étude sera bien souvent un solide ou un ensemble de solides. Bien qu'un solide soit constitué d'atomes, les distances inter-atomiques peuvent être considérées bien plus petites que les dimensions caractéristiques des systèmes dont nous allons étudier le mouvement. Cette différence de dimension permet de considérer le solide d'étude comme une distribution continue de matière. Bien évidemment, en fonction des contraintes, le solide considéré pourrait se déformer, mais nous ne considérerons, dans ce livre, que des solides indéformables, c'est-à-dire que, même soumis à des actions, ils ne se déforment pas.

1.3 Point matériel

Pour étudier certains problèmes et pour aborder différents concepts dans ce chapitre, nous introduisons la notion de point matériel. Elle n'est rien d'autre que l'assimilation d'un système à un point. Le point matériel est un objet de dimension nulle, mais qui possède une masse, celle du système considéré. Au même titre que la notion de solide, cette approximation peut être appliquée lorsque les dimensions du système sont bien plus petites que les distances caractéristiques du mouvement étudié. Attention à ne pas considérer tout solide comme point matériel ; il s'avère que pour des solides en rotation, la simple approximation à un point matériel peut entraîner des erreurs. Néanmoins, avant d'entrer dans le vif du sujet des systèmes solides, il est bien souvent commode de commencer par le point matériel.

2 Trièdres, bases, repères

On considère T = (O, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$) le trièdre défini par trois axes Ox, Oy et Oz concourants en O, et trois vecteurs unitaires $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ non coplanaires. Ce trièdre, supposé fixe (au sens où sa forme ne change pas), forme un solide indéformable immatériel qui constitue un repère d'espace noté R. Dans tout ce livre, le repère R = (O, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$) désignera le référentiel d'espace constitué du point O et des axes Ox, Oy et Oz associés à la base constituée des **trois vecteurs unitaires** ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$). Lorsque ce repère sera associé à un solide particulier S_i, le repère sera noté R_i et s'entendra comme constitué de $R_i = (O_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{z}_i)$, sauf cas particulier qui sera indiqué.

REMARQUE

Dans ce document, les vecteurs sont notés en italique gras suivant la norme internationale, par exemple $\boldsymbol{x}$, afin d'alléger l'écriture, sachant que l'on trouve aussi comme notation $\underline{x}$ ou $\vec{x}$ dans les ouvrages. Il n'y aura aucune confusion possible car nous ne manipulerons dans cet ouvrage que des scalaires x, des vecteurs $\boldsymbol{x}$ ou des torseurs constitués de vecteurs. Les solides seront identifiés par S_i où i désigne le numéro du solide. Les repères seront notés R ou R_i avec i le numéro du repère. Enfin, les points seront notés A, B… en lettre normale droite.

2.1 Repérage d'un point

On repère la position d'un point M dans $\mathcal{E}$ (qui est un espace affine ; il est complètement défini dans le chapitre suivant) par ses coordonnées (*figure 1.1*). En fait c'est le choix du repère d'espace (O, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$) qui permet de définir ses coordonnées. Comme il y a une

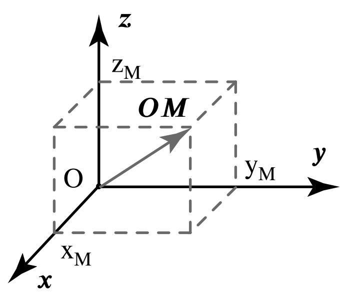


Figure 1.1 – Vecteur position pour un repérage cartésien.

infinité de choix possibles, il y a également une infinité de coordonnées pour un même point M à une position donnée.

Si on choisit $(\mathrm{O}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ orthonormé direct, alors les coordonnées de M s'obtiennent par projection orthogonale de $\boldsymbol{OM}$ sur les vecteurs de la base :

$$x_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{OM} \cdot \boldsymbol{x} \quad y_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{OM} \cdot \boldsymbol{y} \quad z_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{OM} \cdot \boldsymbol{z}.$$

Dans cette équation, $\cdot$ désigne le produit scalaire des deux vecteurs (pour plus de détails sur le produit scalaire, reportez vous à l'annexe A).

2.2 Vitesse et accélération d'un point

a) Notion de temps

La notion de temps ou de durée en mécanique classique est un concept autonome. On parlera donc d'instants t dans un ensemble $\mathcal{T}$ muni d'une chronologie. La différence entre deux instants est appelée durée (*figure 1.2*).

Les horloges - supposées galiléennes, terme qui sera précisé dans le chapitre consacré à la dynamique - sont classiquement fondées sur des mouvements répétitifs : la rotation de la Terre est le premier d'entre eux.

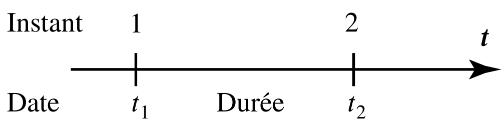


Figure 1.2 – Temps, durée.

b) Vecteur vitesse d'un point

On choisit un référentiel d'espace temps $(\mathrm{O}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ et $(\mathrm{O}, \boldsymbol{t})$ qui, selon les applications, peut être :

- de Copernic : centre de masse du système solaire (assimilé à celui du Soleil) et trois étoiles fixes plus une horloge ;
- géocentrique : centre de masse de la Terre et trois étoiles fixes plus une horloge ;
- terrestre : un point et trois axes du laboratoire ainsi qu'une horloge.

REMARQUE

Pour les applications visées dans ce cours, la notion de temps restera classique (car les vitesses envisagées sont faibles). Nous confondrons afin de ne pas alourdir la présentation les notions de référentiel d'espace temps (souvent noté $\mathcal{R}$) et celle de repère noté R.

DÉFINITION

Soit un point matériel M en mouvement et soit un repère R (référentiel d'espace temps en toute rigueur $\mathcal{R}$). Le vecteur vitesse $\boldsymbol{V}(\mathrm{M/R})$ est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\boldsymbol{OM}$ dans le référentiel considéré :

$$\boldsymbol{V}(\mathrm{M/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}. \quad (1.1)$$

Unité : la vitesse s'exprime en : m . s^{-1}.

DÉFINITION

La suite des points P de $\mathcal{E}$ (espace affine de dimension trois) qui coïncident avec M au cours du temps (courbe décrite par le point) est appelée trajectoire de M dans le repère R.

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire au point M à l'instant t considéré (*figure 1.3*).

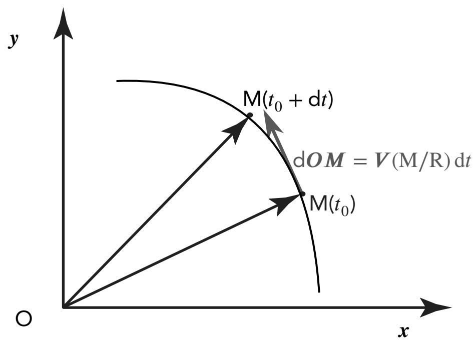


Figure 1.3 – Vecteur vitesse.

c) Vecteur accélération d'un point

DÉFINITION

Le vecteur accélération du point M par rapport au repère considéré est noté $\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{M/R})$, donné par :

$$\boldsymbol{\Gamma}(\mathrm{M/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}(\mathrm{M/R})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathrm{R}}. \quad (1.2)$$

Unité : l'accélération s'exprime en : m . s^{-2}.

3 Calcul des vecteurs vitesse

Soit un repère R_1 (O, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{z}$) en rotation autour de l'axe (O, $\boldsymbol{z}$) par rapport à un repère R (O, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$). L'angle ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_1$) est noté α (*figure 1.4*). Le symbole avec les deux cercles imbriqués à côté de $\boldsymbol{z}$ correspond à la flèche du vecteur vue de face. C'est une manière d'indiquer que le vecteur pointe vers nous. Le repère est donc direct (la base constituée par les trois vecteurs en toute rigueur). Par la suite nous ne l'indiquerons pas nécessairement. Il faut retenir que nous ne travaillerons qu'avec des bases directes.

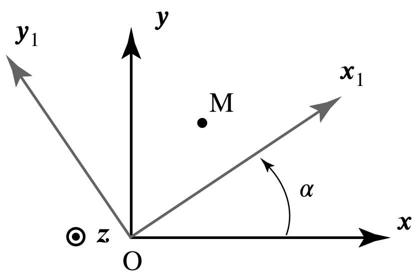


Figure 1.4 – Changement de repère.

3.1 Calcul de la vitesse dans R

Par définition, on a :

$$\boldsymbol{V}(\text{M/R}) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(x\,\boldsymbol{x} + y\,\boldsymbol{y} + z\,\boldsymbol{z})}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}}$$
$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x} + x\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y} + y\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z} + z\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}}.$$

Par construction du repère R, les vecteurs de base ($\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$) sont figés dans ce repère et sont alors des fonctions indépendantes du temps. On a ainsi :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}} = \boldsymbol{0} \text{ de même que } \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}} = \boldsymbol{0} \text{ et } \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{R}} = \boldsymbol{0}.$$

INTERPRÉTATION

On s'accroche à un repère ; on ne voit pas évoluer les vecteurs de base qui semblent ainsi fixes par rapport à nous. Donc le vecteur vitesse se résume à :

$$\boldsymbol{V}(\text{M/R}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z} = \dot{x}\,\boldsymbol{x} + \dot{y}\,\boldsymbol{y} + \dot{z}\,\boldsymbol{z}.$$

3.2 Calcul de la vitesse dans R_1

On va cette fois utiliser le second repère pour calculer le vecteur vitesse du même point au même instant. On a par définition :

$$\boldsymbol{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_1) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} = \left.\frac{\mathrm{d}(x_1\boldsymbol{x}_1 + y_1\boldsymbol{y}_1 + z\boldsymbol{z})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1}.$$

Pour la même raison que précédemment, la dérivée par rapport au temps d'un vecteur de base appartenant au repère R_1, calculée à partir de ce repère, est nulle. Le vecteur vitesse se résume donc à :

$$\boldsymbol{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_1) = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_1 + \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}_1 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z} = \dot{x}_1\boldsymbol{x}_1 + \dot{y}_1\boldsymbol{y}_1 + \dot{z}\boldsymbol{z}.$$

CONCLUSION

Les composantes du vecteur vitesse dans un repère donné sont données par les dérivées par rapport au temps des coordonnées du vecteur position exprimées dans la base liée au repère.

3.3 Relation entre les vecteurs vitesse

Nous allons établir une relation entre les vecteurs vitesse $\boldsymbol{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R})$ et $\boldsymbol{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_1)$. Puisque l'axe $\boldsymbol{z}$ est fixe aussi bien dans R que dans R_1, on supposera pour simplifier (et sans perdre en généralité) que le mouvement de M se fait dans un plan $z = z_0 = Cte$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}) &= \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(x_1\boldsymbol{x}_1 + y_1\boldsymbol{y}_1 + z_0\boldsymbol{z})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}\\ &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_1 + x_1\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{y}_1 + y_1\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}\\ &= \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} + x_1\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} + y_1\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}.\end{aligned}$$

Il faut maintenant calculer les termes $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}$ et $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}}$. Or, on sait que le vecteur $\boldsymbol{x}_1$ est défini à chaque instant t par l'angle α (*figure 1.4*) qui est lui-même fonction du temps. On obtient ainsi :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}.$$

Or nous pouvons exprimer explicitement $\boldsymbol{x}_1$ en fonction de l'angle α, dans la base associée au repère R (*figure 1.4*) :

$$\boldsymbol{x}_1 = \cos\alpha\,\boldsymbol{x} + \sin\alpha\,\boldsymbol{y},$$

dont la dérivation par rapport à α donne :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\mathrm{R}} = -\sin\alpha\,\boldsymbol{x} + \cos\alpha\,\boldsymbol{y}.$$

On reconnaît le vecteur $\boldsymbol{y}_1$ et on peut donc écrire :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_1}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\mathrm{R}} \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dot{\alpha}\boldsymbol{y}_1 = \dot{\alpha}\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{x}_1.$$

Dans cette équation, nous faisons apparaître le produit vectoriel $\wedge$; plus de détails sont donnés dans l'annexe A. Le même travail est fait pour le second terme, $\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}_1}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \dot{\alpha}\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{y}_1$ et on obtient ainsi :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} + \dot{\alpha}\,\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{OM}.$$

REMARQUE

Le vecteur $\dot{\alpha}\boldsymbol{z}$ est appelé vecteur vitesse de rotation ; il renseigne à la fois sur l'intensité de la vitesse de rotation angulaire et sur l'axe autour duquel la rotation du repère R_1 par rapport au repère R se produit. On le note $\boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R})$ ce qui permet d'écrire :

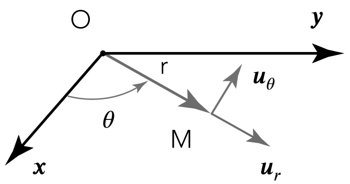
$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} + \boldsymbol{\Omega}(\mathrm{R}_1/\mathrm{R})\wedge\boldsymbol{OM}. \tag{1.3}$$

Cette formule est couramment appelée formule de **dérivation vectorielle**. Elle permet de passer d'un repère à un autre (d'une base à une autre en fait car on ne s'intéresse qu'aux vecteurs) pour exprimer le vecteur vitesse.

Encart 1.1 Systèmes de coordonnées

Selon la symétrie du mouvement, certains repères sont plus adaptés que d'autres pour décrire le mouvement. Nous proposons ici trois repères classiques permettant de décrire le mouvement en coordonnées polaires planes, en coordonnées cylindriques et en coordonnées sphériques.

Coordonnées polaires planes : $\mathrm{R}_1 = (\mathrm{O}, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta)$.



$$\begin{cases} x(t) = r(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta(t) = \arctan(y/x) \\ r(t) = \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

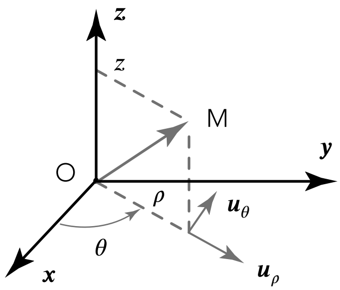
En coordonnées polaires planes, le point M est repéré par :

$$\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{u}_r \text{ avec } \boldsymbol{u}_r = \cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}.$$

En dérivant cette expression on obtient la vitesse

$$\boldsymbol{V}(\mathrm{M}/\mathrm{R}_1) = \left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathrm{R}_1} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}_\theta.$$

Coordonnées cylindriques : $R_1 = (O, \boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{z})$.



$$\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = \rho(t)\sin\theta(t) \\ z(t) = z(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta(t) = \arctan(y/x) \\ \rho(t) = \sqrt{x^2+y^2} \\ z(t) = z(t). \end{cases}$$

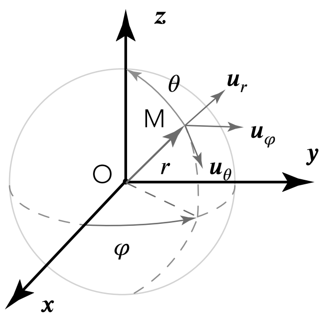
En coordonnées cylindriques, le point M est repéré par :

$$\boldsymbol{OM} = \rho\boldsymbol{u}_\rho + z\boldsymbol{z} \text{ avec } \boldsymbol{u}_\rho = \cos\theta\boldsymbol{x} + \sin\theta\boldsymbol{y}.$$

En dérivant cette expression on obtient la vitesse

$$\boldsymbol{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\boldsymbol{OM}}{dt}\right|_{R_1} = \frac{d\rho}{dt}\boldsymbol{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{z}.$$

Coordonnées sphériques : $R_1 = (O, \boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{u}_\varphi)$.



$$\begin{cases} x(t) = r(t)\sin\theta(t)\cos\varphi(t) \\ y(t) = r(t)\sin\theta(t)\sin\varphi(t) \\ z(t) = r(t)\cos\theta(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \theta(t) = \arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \varphi(t) = \arctan(y/x) \\ r(t) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \end{cases}$$

En coordonnées sphériques, le point M est repéré par :

$$\boldsymbol{OM} = r\boldsymbol{u}_r \text{ avec } \boldsymbol{u}_r = \sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{x} + \sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{y} + r\cos\theta\boldsymbol{z}.$$

En dérivant cette expression on obtient la vitesse

$$\boldsymbol{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\boldsymbol{OM}}{dt}\right|_{R_1} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{u}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\boldsymbol{u}_\varphi.$$

4 Action mécanique

4.1 Définitions

a) Interaction

Deux solides S_1 et S_2 ou deux points matériels M_1 et M_2 sont dits en interaction si une modification de position de l'un entraîne une modification de position de l'autre.

b) Action mécanique

DÉFINITION

On dit que S_2 exerce une action mécanique sur S_1 si, relativement à un référentiel donné, les mouvements de S_1 par rapport à ce référentiel dépendent de la présence de S_2.

D'une façon générale, on appelle action mécanique toute cause physique susceptible de maintenir ou de modifier les mouvements d'un corps. On peut par exemple recenser : le pied d'un footballeur qui frappe un ballon, les champs électriques et magnétiques qui dévient l'électron, le rotor qui entraîne l'axe d'une turbine. Ces quelques exemples illustrent les deux grandes catégories d'actions mécaniques :

- les actions à distance liées à des champs de force (exemple : champ d'accélération de la pesanteur ou champ électromagnétique) ;
- les actions de contact (exemple : action de la main sur la poignée d'une porte, pression de l'eau sur un plongeur).

Ces actions s'exercent soit sur une surface, parfois réduite à une ligne ou un point (exemple : contact entre deux solides), soit sur un volume (exemple : la pesanteur).

c) Force

Nous allons décider que les actions mécaniques (à distance, de contact entre solides) seront modélisées par une force, laquelle est représentée par un vecteur.

4.2 Action mécanique de contact

La modélisation des actions de contact est, en général, complexe car elles dépendent de la structure microscopique des surfaces en contact. La répartition de ces actions de contact peut être ponctuelle, linéique ou surfacique et nécessite souvent le recours à des méthodes statistiques pour représenter l'effet global des actions locales. Nous allons cependant évoquer ici deux cas particuliers pour lesquels des lois expérimentales ont pu être établies :

- contact parfait (sans frottement) ;
- loi de frottement de glissement (loi d'Amontons-Coulomb).

Le contact entre deux solides S_1 et S_2 s'effectue selon une surface élémentaire notée dS (cette surface peut être réduite à une ligne ou un point). On sait que les efforts élémentaires exercés par S_2 sur S_1 en un point M sont représentés par un vecteur $\mathrm{d}\boldsymbol{F}(S_2 \rightarrow M)$ attaché au point M. Le rapport entre l'effort élémentaire et l'élément de surface est une densité surfacique d'effort (homogène à une pression exprimée en $N.m^{-2} = Pa$). Cependant, dans la plupart des cas, il est impossible de connaître la valeur de ces actions en tout point M de la surface de contact dS. On doit alors faire des hypothèses.

a) Cas du contact dit parfait (sans frottement)

Dans le cas du contact parfait, les phénomènes de frottement au contact. Les forces de contact, qui modélisent cette action, sont des forces de pression dirigées selon la normale $\boldsymbol{n}$ en M à la surface de contact dS. Cela revient à supposer qu'une infime couche de fluide parfait est interposée entre les deux surfaces solides.

REMARQUE

Dans le cas d'un contact ponctuel entre les solides S_1 et S_2, la force de contact est dirigée selon la normale au plan tangent aux surfaces en contact (*figure 1.5*).

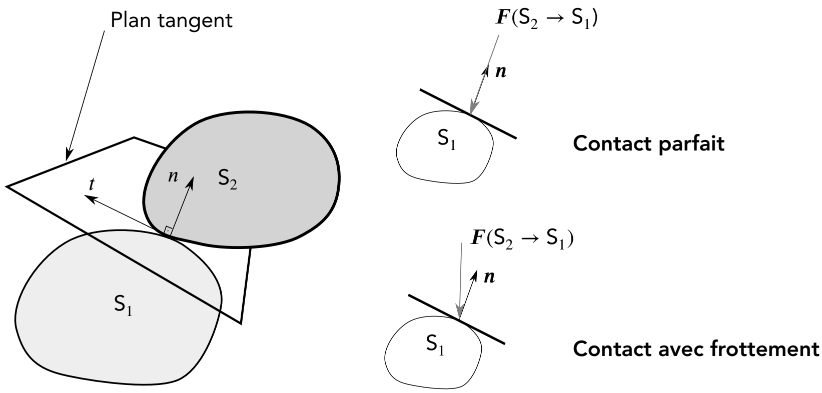


Figure 1.5 – Contact entre deux solides. Cas du contact parfait (sans frottement) et avec frottement.

b) Cas du contact avec frottement

Lors d'un contact avec frottement, la force modélisant l'action de contact est constituée de deux composantes : l'une dirigée suivant la normale $\boldsymbol{n}$ en M à la surface de contact dS, et une composante appartenant au plan tangent en M à cette surface de contact (*figure 1.5*).

On note $\mathrm{d}\boldsymbol{N}$ la force normale exercée par S_2 en M et $p_n = \mathrm{d}N/\mathrm{d}S$ la pression correspondante où $\mathrm{d}N = \|\mathrm{d}\boldsymbol{N}\|$. On note $\mathrm{d}\boldsymbol{T}$ la force tangentielle exercée par S_2 en M et $\tau = \mathrm{d}T/\mathrm{d}S$ la pression (dite de cisaillement) correspondante où $\mathrm{d}T = \|\mathrm{d}\boldsymbol{T}\|$.