Angela Gammella-Mathieu

1re année
IUT

LES MATHÉMATIQUES DE L'IUT

Rappels de cours et travaux dirigés corrigés

2e édition enrichie

ellipses

Chapitre 1

Les fondamentaux

« L'étude des mathématiques est comme le Nil, qui commence en modestie et finit en magnificence. »

Charles Calet Colton (1780-1832)

Le but de ce chapitre est de faire un rappel des principales règles de calcul et de mettre à disposition différents exercices pour les assimiler. Ce premier chapitre revoit donc les propriétés des fractions, des radicaux, des valeurs absolues, des puissances, de l'exponentielle et du logarithme. Des résolutions d'équations ainsi que quelques exercices de calcul littéral avec des identités remarquables, des développements et des factorisations seront aussi proposés. Enfin des rappels de trigonométrie et de géométrie vectorielle, assortis de plusieurs exemples d'application seront également présentés. Chemin faisant, toutes les propriétés des fonctions de référence seront revisitées.

Ce chapitre est essentiel pour la compréhension de la suite de l'ouvrage. En effet, il est notamment indispensable de connaître les fonctions usuelles avant de pouvoir aborder l'étude des dérivées et du calcul intégral. La résolution d'équations est un préalable nécessaire pour pouvoir reconnaître et résoudre un système linéaire. Les calculs de trigonométrie serviront entre autres dans le chapitre sur les complexes. Les vecteurs seront utilisés dans le chapitre de géométrie dans l'espace par exemple pour calculer un produit scalaire ou un produit vectoriel.

Ce chapitre ne devrait pas être une découverte pour les lecteurs et pourra donc être étudié avant même de commencer des études dans le supérieur. Les étudiants pourront ensuite y revenir tout au long de leur formation, s'ils en ressentent le besoin.

1.1 Les fractions

Proposition. *Soient des réels a, b, c et d, avec b et d non nuls, on a*

i) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

ii) $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

iii) si c est non nul, alors $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

iv) si x est un réel non nul, alors $\dfrac{ax}{bx} = \dfrac{a}{b}$

v) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ *équivaut à $ad = bc$*

La remarque suivante devrait permettre d'éviter certaines erreurs fréquentes.

Remarque. Soient a, b, c, d, x des réels, avec b et d non nuls, on a

* $\dfrac{a+c}{b+d} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$
* $\dfrac{a+x}{b+x} \neq \dfrac{a}{b}$
* $\dfrac{a}{b+d} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{d}$

Pour réviser les fractions

Exemples 1. *A) Calculer*

$$F = \frac{16 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^{5}}{12 \times 10^{-1} \times 25 \times 10^{-3}}$$

B) Réduire les fractions suivantes où x et y sont des réels non nuls.

1) $G = \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$

2) $H = \dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{1}{x} + 4}$

3) $I = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{3}(3 + \dfrac{1}{x})$

1.2 Les racines carrées

Définition. *Soit x un nombre réel positif. On note $\sqrt{x}$ ou $x^{\frac{1}{2}}$ le nombre réel positif tel que*

$$(\sqrt{x})^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2 = x$$

De cette définition, découlent les propriétés suivantes.

Proposition. *Pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout réel $y \geq 0$, on a*

i) $\sqrt{x^2} = x$

ii) $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

iii) si $y \neq 0$, alors $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$

iv) $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ *équivaut à* $x < y$

Remarque. Attention, pour tout x et y réel, $\sqrt{x+y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ en général.

Pour réviser les racines carrées

Exemples 2. *A) Calculer*

1) $\sqrt{20} - 12\sqrt{5} + 2\sqrt{125}$

2) $3\sqrt{27} - \sqrt{108}$

3) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

B) Soient x et y des réels non nuls, réduire

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

2) $\sqrt{\dfrac{4}{3x^2}}\sqrt{\dfrac{27}{64y^2}}$

3) $\dfrac{\sqrt{12+4\sqrt{2}}}{2}$

1.3 Les valeurs absolues

Définition. *Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le nombre réel positif qui vaut x si x est positif et $-x$ si x est négatif.*

De cette définition, découlent les propriétés suivantes.

Proposition. *Pour tout réel x et pour tout réel y, on a*

i) $|xy| = |x||y|$

ii) $|-x| = |x|$

iii) *si* $y \neq 0$, *alors* $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$

Pour réviser les valeurs absolues

Exemples 3. *Résoudre*

1) $|x| + |x-1| = 1$

2) $|1-x| \geq 2|x| - 1$

1.4 Les puissances entières

Définition. *Soit x un réel et n un entier, on a $x^0 = 1$ et*

$$x^n = x \times x \times \ldots \times x$$

avec n facteurs égaux à x. Pour x réel non nul et n entier relatif négatif, on a

$$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

De cette définition, découlent les propriétés suivantes.

Proposition. *Soient x et y des réels et soient n et m des entiers relatifs.*

i) $x^n \times x^m = x^{n+m}$

ii) $(xy)^n = x^n y^n$

iii) $(x^n)^m = x^{nm}$

iv) *si* $y \neq 0$, *alors* $(\frac{x}{y})^n = \frac{x^n}{y^n}$

v) si $y \neq 0$, *alors* $\dfrac{y^n}{y^m} = y^{n-m} = \dfrac{1}{y^{m-n}}$

Pour réviser les puissances entières

Exemples 4. *Soit n un entier relatif, calculer*

1) $(-1)^{2n}$

2) $(-1)^{2n+1}$

3) $\dfrac{24^{3n} \times (\frac{1}{3})^{n-2}}{3^{n+1} \times 8^{n+2}}$

1.5 Exponentielle et logarithme

Voici les propriétés de la fonction exponentielle.

Proposition. *Soient x et y des réels. On a*

i) $e^0 = 1$

ii) $e^1 = e$

iii) $e^{x+y} = e^x e^y$

iv) $e^{-y} = \dfrac{1}{e^y}$

v) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

vi) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(e^x)^n = e^{nx}$

Voici maintenant les propriétés de la fonction logarithme.

Proposition. *Soient x et y des réels strictement positifs. On a*

i) $\ln(1) = 0$

ii) $\ln(e) = 1$

iii) $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

iv) $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$

v) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\ln(x^n) = n \ln(x)$

On a également la proposition suivante.

Proposition. *Soient x et y des réels, on a les propriétés suivantes*

i) $y > 0$ *et* $x = \ln y$ *équivaut à* $y = e^x$

ii) $\ln(e^x) = x$

iii) $\forall y > 0,\ \ln(y^n) = n \ln y$

Pour réviser l'exponentielle et le logarithme

Exemples 5. *Résoudre les équations suivantes sur* $\mathbb{R}$

1) $e^{x+2} < 2$

2) $e^{2x} - 5e^x - 6 = 0$

3) $e^{x^2+2} = e^{3x}$

4) $\ln(x+2) + \ln(2x+5) = 0$

5) $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$

On reviendra sur la fonction exponentielle et la fonction logarithme dans le chapitre sur les fonctions réciproques. On abordera aussi les fonctions exponentielles et logarithmes de base a avec $a > 0$.

1.6 Les puissances réelles

Définition. *Soient x un réel strictement positif et a un réel, on a*

$$x^a = e^{a \ln x}$$

Proposition. *Pour tout $x > 0$ et pour tout a et tout b dans $\mathbb{R}$, on a*

i) $x^a x^b = x^{a+b}$

ii) $(xy)^a = x^a y^a$

iii) $(x^a)^b = x^{ab}$

iv) $x^{-a} = \dfrac{1}{x^a} = (\dfrac{1}{x})^a$

v) $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b} = \dfrac{1}{x^{b-a}}$

Pour réviser les puissances réelles

Exemples 6. *Calculer sans calculatrice*

1) $(\frac{27}{8})^{\frac{2}{3}}$

2) $25^{\frac{-3}{2}}$

3) $(\frac{125}{8})^{\frac{2}{3}}$

4) $5^{0,75} \times 125^{0,75}$

1.7 Développements et factorisations

Définition. *Développer un produit, c'est le transformer en somme. Factoriser une somme, c'est la transformer en produit.*

Proposition. *Pour tout a, tout b et tout c dans $\mathbb{R}$, on a*

i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

iii) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

iv) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

v) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

vi) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

vii) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

viii) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

On verra dans la suite de l'ouvrage la formule du binôme de Newton qui permet de développer $(a+b)^n$ pour tout entier n et on utilisera le triangle de Pascal pour obtenir le développement de $(a+b)^n$ pour n petit.

Pour réviser les développements et factorisations

Exemples 7.

A) *Développer les expressions suivantes où a, b et c sont des réels*

1) $(4a - 3b)^2$

2) $(a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2)$

3) $(3a - 2b + c)^2$

B) Factoriser les expressions suivantes où x, y et z sont des réels

1) $R(x) = (x+5)^2 + 2(x+5)(x-4) + (x-1)^2$

2) $S(x) = 4x^3 + 8x^2y + 4xy$

3) $T(x) = 8x^4 - 16y^4$

4) $U(x) = 8x^3 + 125$

5) $V(x) = 4y^2z^2 - (y^2 + z^2 - x^2)^2$

1.8 La trigonométrie

Nous allons utiliser les vecteurs pour définir les graduations en radians d'un angle orienté et pour introduire les fonctions trigonométriques, mais nous reviendrons sur la notion de vecteurs dans la dernière partie de ce chapitre. Rapportons le plan à un repère orthonormé d'origine 0 et notons I le point de coordonnées $(0,1)$.

Définition. *On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (c'est le sens dit trigonométrique). A tout réel x, on associe un point M du cercle trigonométrique de la manière suivante. On note y l'unique réel dans $]-\pi,\pi]$ tel que $x = y + 2k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$. Puis si $y > 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{IM}$ parcouru dans le sens trigonométrique ait une longueur de x. Si $y < 0$, on associe le point M tel que l'arc $\widehat{IM}$ parcouru dans le sens inverse du sens trigonométrique ait une longueur de $|y| = -y$. On dit que x est une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{OI}, \vec{OM})$ et que y est la mesure de cet angle dans $]-\pi,\pi]$. Tous les réels qui sont égaux à 2π près sont représentés par le même point sur le cercle trigonométrique.*

La mesure en radians d'un angle orienté du type $(\vec{OI}, \vec{OM})$ où M est un point du cercle trigonométrique est donc défini à 2π près. Lorsque α_1 et α_2 sont deux mesures en radians d'un même angle, on peut donc dire qu'il existe un entier relatif k tel que

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi$$

c'est-à-dire que α_1 et α_2 sont égaux modulo 2π, ce qui peut se noter de la manière suivante

$$\alpha_1 = \alpha_2 \, [2\pi]$$