Mathématiques

IUT 1re année

3e édition

Thierry Alhalel
Professeur à l'IUT de Blagnac

Florent Arnal
Professeur à l'IUT de Bordeaux

Laurent Chancogne
Professeur à l'INP de Bordeaux

DUNOD

Graphisme de couverture : Elizabeth Riba

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-082170-9

Table des matières

1 Notions de base

Objectifs

- Rappeler certaines notions, vues en Terminale au lycée, dont une bonne maîtrise est indispensable pour aborder sereinement les chapitres suivants
- Rappeler les notions fondamentales de l'analyse
- Revoir les connaissances de base sur l'algèbre des nombres complexes et le plan complexe

Conseils

- Apprenez les formules rappelées dans ce chapitre
- Entraînez-vous sur des exercices

1.1 GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Les fonctions seront utilisées fréquemment, notamment pour modéliser des phénomènes continus.

1.1.1 Domaine de définition

Définition 1.1

On appelle fonction numérique d'une variable réelle toute application dont les ensembles de départ et d'arrivée sont des ensembles de réels.

On notera :
$$f: \begin{array}{l} D \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$$

L'ensemble D est appelé l'ensemble de définition de f.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont des sous-ensembles particuliers de $\mathbb{R}$.
Dans le cas où la fonction n'est connue que par l'écriture de $f(x)$, on sous-entend que *le domaine de définition est l'ensemble de tous les réels x tels que $f(x)$ existe*.

Exercice 1 : Recherche d'un domaine de définition

Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 4}}$.

Solution

$f(x)$ existe si et seulement si $x^2 - 4 > 0$ (l'expression sous le radical doit être positive et le dénominateur doit être non nul). Considérons le polynôme $x^2 - 4$. Ce polynôme admet deux racines : – 2 et 2. On rappelle qu'un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur des racines. Ici, $a = 1$ donc $x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.
On peut donc conclure que le domaine de définition de f est : $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$.

1.1.2 Propriétés graphiques d'une fonction

On se place dans un repère **orthonormal** du plan $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Définition 1.2
Soit f une fonction définie sur un ensemble I.
L'ensemble des points M de coordonnées $M(x;f(x))$, $x \in I$, est appelé **courbe représentative** de f ou **graphe** de f.
La courbe représentative de f a pour équation $y = f(x)$.

Exemple : Représentation graphique de la fonction « Partie entière »

La fonction partie entière, notée E, est définie sur $\mathbb{R}$ par $E(x) = n$ pour tout x tel que $n \leq x < n+1$ où $n \in \mathbb{N}$.
Par exemple, on a : $E(0) = 0$; $E(0,5) = 0$ et $E(1) = 1$.
La représentation graphique de cette fonction est la suivante :

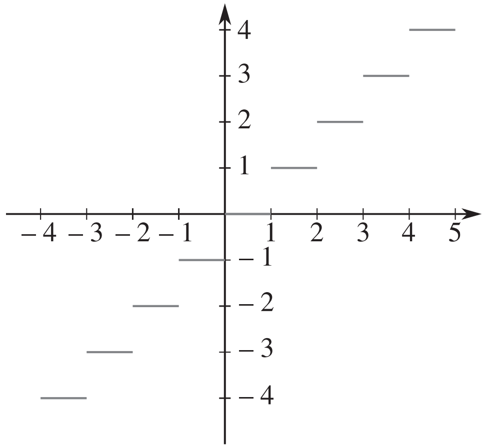

Figure 1.1 Représentation de la fonction « Partie entière »

1.1.3 Parité d'une fonction

Définition 1.3

Un ensemble D de $\mathbb{R}$ est centré en 0 si $\forall x \in D, -x \in D$.

Définition 1.4

Soit f une fonction dont le domaine de définition D est centré en 0.
La fonction est **paire** si $\forall x \in D, f(-x) = f(x)$.

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.

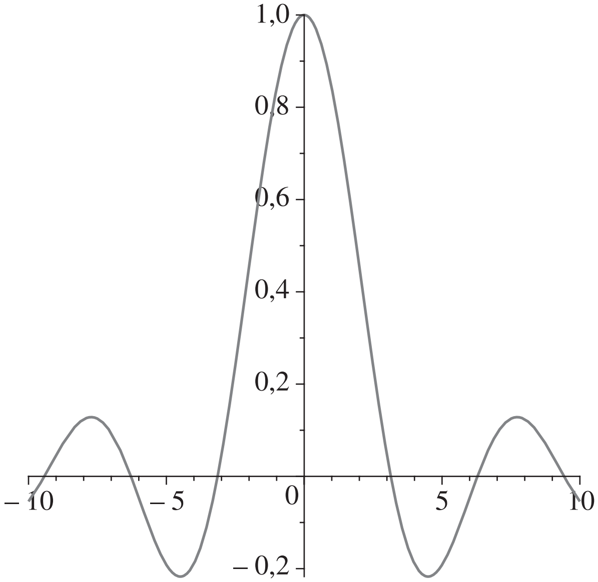

Figure 1.2 Courbe représentant une fonction paire

Définition 1.5

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition D est centré en 0.
La fonction f est dite **impaire** si $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Dans ce cas, la courbe représentative de f est **symétrique par rapport à l'origine** O du repère.

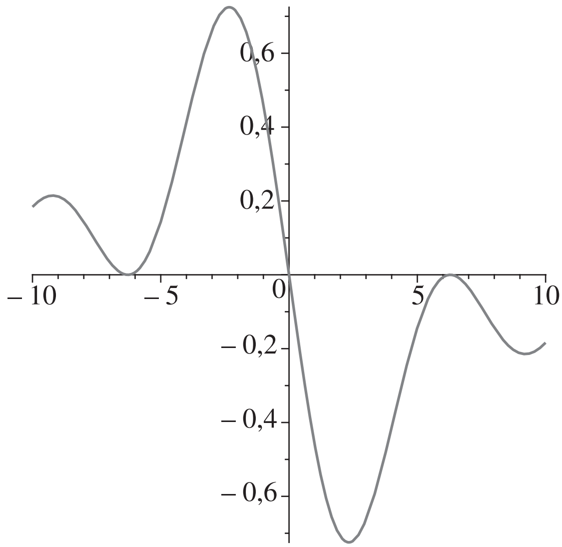

Figure 1.3 Courbe représentant une fonction impaire

- Si f est une fonction impaire définie en 0, alors $f(-0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$.
- Pour l'étude d'une fonction paire ou impaire, on peut donc restreindre l'intervalle d'étude.

1.1.4 Périodicité

Définition 1.6

Soit f une fonction réelle dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$.
La fonction f sera dite périodique de période T si T est le plus petit réel strictement positif tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.

Conséquences

En conséquence, on peut restreindre l'étude de la fonction f à un intervalle I de longueur T.
La courbe représentative de f sera obtenue à partir de l'arc d'équation : $\begin{cases} y = f(x) & \text{si } x \in I \\ y = 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$ par des translations de vecteurs $kT\vec{i}$ avec k entier relatif.

Exercice 2

Montrez que la fonction $f : x \mapsto x - E(x)$ *est une fonction périodique dont on donnera la période. Représentez cette fonction.*

Solution

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout x réel, on a :
$f(x+1) = (x+1) - E(x+1) = (x+1) - [E(x)+1] = x - E(x) = f(x)$.
Avant de conclure sur la périodicité de f, il faut s'assurer que 1 est le plus petit réel T tel que, pour tout réel x, $f(x+T) = f(x)$.
En particulier, on doit avoir : $f(T) = f(0)$.
Or, si $0 < T < 1$ alors $f(T) = T - E(T) = T$ et $f(0) = 0$ donc $f(T) \neq f(0)$.
La fonction f est donc périodique de période 1. Il suffit de la représenter sur $[0;1[$, en utilisant que sur cet intervalle $f(x) = x$, puis d'effectuer des translations de vecteurs $k\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$. La représentation graphique est la suivante :

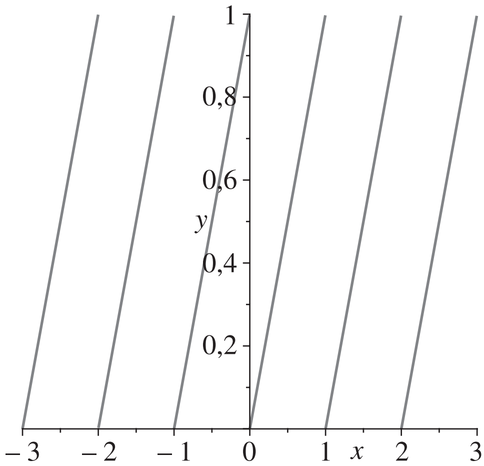

Figure 1.4

1.1.5 Courbes de fonctions liées à une fonction donnée

Nous allons, dans cette partie, considérer les fonctions du type $x \mapsto f(x) + \lambda$ et $x \mapsto f(x+\lambda)$.

Théorème 1.1

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x) + \lambda$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $\lambda\vec{j}$.
La courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(x+\lambda)$ est l'image de la courbe représentative de f par la translation de vecteur $-\lambda\vec{i}$.

Exercice 3

Déterminez une expression « envisageable » de la fonction g dont la courbe est donnée ci-dessous (on fera le lien avec la fonction « Inverse »).

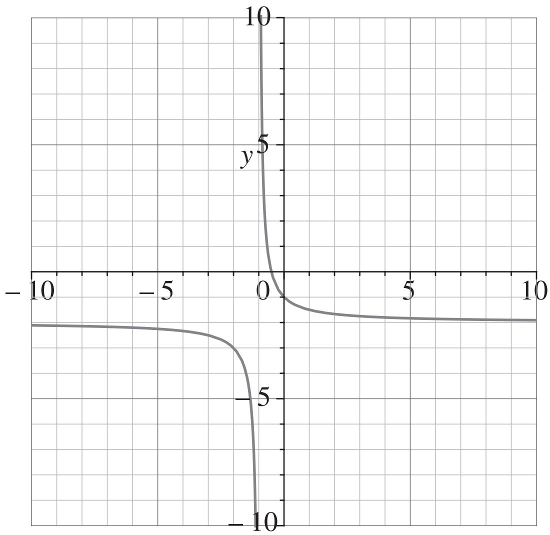

Figure 1.5

Solution

Cette courbe semble être l'image de la courbe de la fonction « Inverse » $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-\vec{i} - 2\vec{j}$ qu'on peut décomposer en deux translations : l'une de vecteur $-\vec{i}$ et l'autre de vecteur $-2\vec{j}$.

La translation de vecteur $-\vec{i}$ est associée à $f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.

La translation de vecteur $-2\vec{j}$ conduit à considérer :

$$g(x) = f(x+1) - 2 = \frac{1}{x+1} - 2 = \frac{-2x-1}{x+1}.$$

1.2 TRIGONOMÉTRIE

Pour tout ce chapitre, le plan sera rapporté au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 1.7

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens direct.

Définition 1.8

Soit M un point sur ce cercle, tel que $(\vec{i};\overrightarrow{OM}) = x$.
On appelle cosinus de l'angle orienté $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ l'abscisse de M.
On appelle sinus de l'angle $(\vec{i};\overrightarrow{OM})$ l'ordonnée de M.

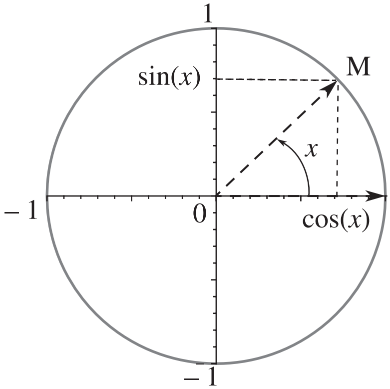

Figure 1.6 Cercle trigonométrique

L'essentiel

- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- Les fonctions $\cos : x \mapsto \cos(x)$ et $\sin : x \mapsto \sin(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[-1;1]$.
- Ces fonctions sont périodiques, de période $T = 2\pi$.
- La fonction sin est impaire ; la fonction cos est paire.
- On a les formules suivantes : $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ et $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$.
- La formule $\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ montre que la courbe d'équation $y = \cos(x)$ se déduit de la courbe d'équation $y = \sin(x)$ par la translation de vecteur $-\dfrac{\pi}{2}\vec{i}$.

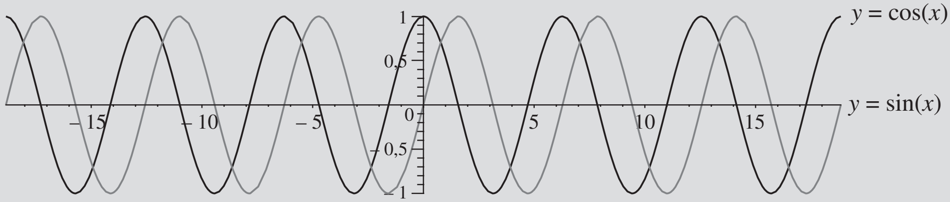

Figure 1.7 Courbes représentatives des fonctions sin et cos

Propriété-Définition 1.9

La fonction tangente, notée tan, est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour tout x tel que $\cos(x) \neq 0$.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\text{-}\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \,,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D'après les propriétés vues précédemment, on a :

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

et $\tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$.

Ainsi, cette fonction est périodique, de période π, et impaire. Il suffit de l'étudier sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

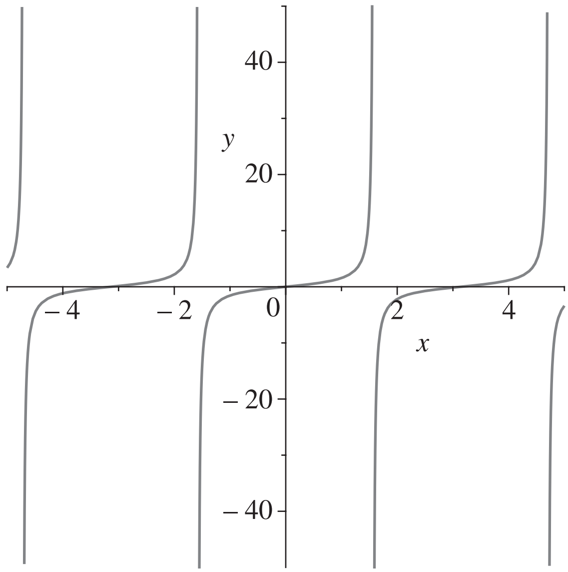

Figure 1.8 Représentation graphique de la fonction tan

Formules de trigonométrie		
$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	

Valeurs remarquables					
Valeur de x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	non définie

Formules d'addition et duplication	
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$	$\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$

Formules de développement et de factorisation	
$\cos a \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$	$\sin a \cos b = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$
$\sin a \sin b = \dfrac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$	
$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$	$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Équations trigonométriques

$$\cos a = \cos b \Leftrightarrow b = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad b = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin a = \sin b \Leftrightarrow b = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad b = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$\tan a = \tan b \Leftrightarrow b = a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 4

On considère un signal continu donné par la fonction f définie par : $f(t) = a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)$.

a. *Déterminez des conditions sur A et ω telles que* $f(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ *où* $A > 0$.

b. *Exprimez sous la forme précédente les fonctions définies par :*
$f_2(t) = \sin(t) + \cos(t)$ *et* $f_3(t) = \sin(t) - \cos(t)$.

c. *Tracez sur un même graphe les courbes représentatives des fonctions* f_1, f_2 *et* f_3 *où* f_1 *est définie par :* $f_1(t) = \sqrt{2}\sin(t)$.

Solution

a. On a : $A\sin(\omega t + \varphi) = A[\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)]$ donc $A\sin(\omega t + \varphi) = [A\cos(\varphi)]\sin(\omega t) + [A\sin(\varphi)]\cos(\omega t)$.
En identifiant, on obtient : $a = A\cos(\varphi)$ et $b = A\sin(\varphi)$ soit :
$\cos(\varphi) = \dfrac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{b}{A}$.

En utilisant $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$, il vient $\left(\dfrac{a}{A}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{A}\right)^2 = 1$ soit $a^2 + b^2 = A^2$.

A correspondant à l'amplitude du signal, on le prend positif.
On a donc : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b. Considérons $f_2(t) = \sin(t) + \cos(t)$. D'après ce qui précède, en considérant $a = b = 1$, on obtient :
$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$, $\cos(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. On prend : $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

On a donc : $f_2(t) = \sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Par un raisonnement similaire, on obtient : $f_3(t) = \sqrt{2}\sin\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

c. La première courbe (en rose) s'obtient en traçant une courbe similaire à celle de sin mais avec une amplitude de $\sqrt{2}$, au lieu de 1.
Les courbes de f_2 et f_3 (respectivement en gris et en noir) se déduisent de la première à l'aide de translations de vecteurs respectifs : $-\dfrac{\pi}{4}\vec{i}$ et $\dfrac{\pi}{4}\vec{i}$.

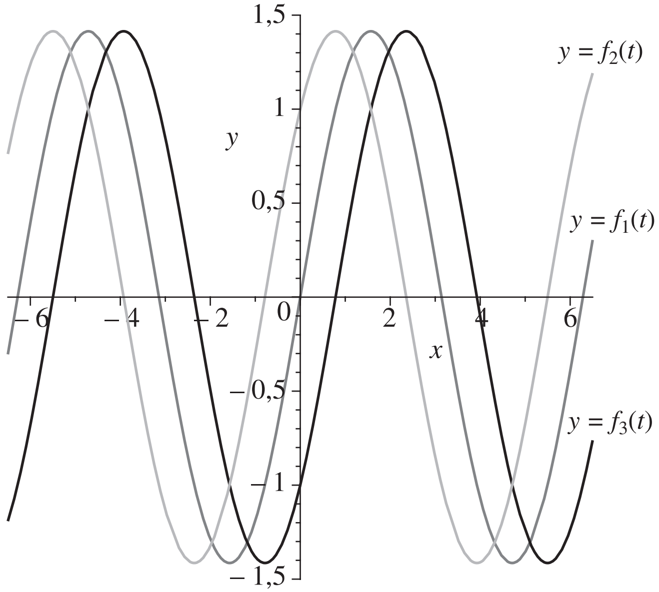

Figure 1.9 Courbes représentatives des trois fonctions

1.3 LES NOMBRES COMPLEXES

1.3.1 Introduction

Les nombres complexes permettent de résoudre certaines équations n'admettant pas de solution réelle. Ils sont très utiles en géométrie mais aussi dans certains domaines de la physique, notamment en électronique (notions de phase, amplitude d'un signal, gain…).

On définit le nombre imaginaire i tel que $i^2 = -1$. Nous tenons à préciser que, dans certaines disciplines, par exemple en électronique, on remplace la lettre i par la lettre j (i étant associée à l'intensité d'un courant).

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, est tel que : $\mathbb{C} = \{a + ib, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Enfin, on munit cet ensemble des lois « + » et « × » telles que celles-ci prolongent les lois de $\mathbb{R}$. Il est à noter que : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

1.3.2 Généralités

Définition 1.10

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$).

$a + ib$ est appelée forme algébrique de z.

La partie réelle de z est le réel, noté $\mathrm{Re}(z)$, défini par $\mathrm{Re}(z) = a$.

La partie imaginaire de z est le réel, noté $\mathrm{Im}(z)$, défini par $\mathrm{Im}(z) = b$.

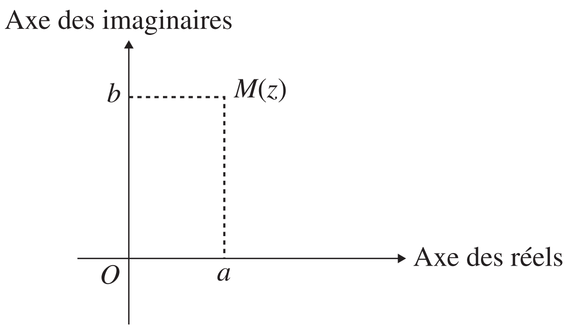

Figure 1.10

Propriété 1.1
Soient a, a', b et b' des nombres réels.
Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Ainsi : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.

Définition 1.11
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$).
Le nombre complexe $\overline{z}$, conjugué de $z = a + ib$, est défini par $\overline{z} = a - ib$.

Propriété 1.2
Pour tous nombres complexes z et z', n étant un entier, on a :

- $\overline{(z + z')} = \overline{z} + \overline{z'}$ $\quad \overline{(z \times z')} = \overline{z} \times \overline{z'}$ $\quad \overline{z^n} = (\overline{z})^n$ $\quad \overline{\overline{z}} = z$
- si $z \neq 0$ alors : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ et $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ et $\begin{cases} z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z) \\ z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z) \end{cases}$

1.3.3 Forme trigonométrique

Module et argument d'un nombre complexe

Définition 1.12
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe ($(a, b) \in \mathbb{R}^2$).
Le module de z, noté $|z|$, est défini par : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Géométriquement, le module de $|z|$ correspond à la longueur OM.

Définition 1.13
Soit z un nombre complexe non nul.
Un argument de z est le réel, noté $\arg(z)$, correspondant à une mesure de l'angle orienté $(\vec{u};\overrightarrow{OM})$.

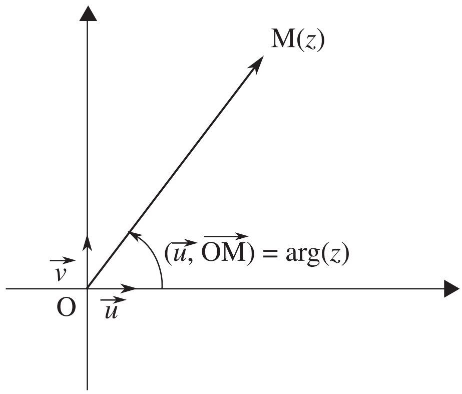

Figure 1.11

Propriété 1.3
Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

$|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad (2\pi)$

$|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) \quad (2\pi)$

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad (2\pi)$

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad (2\pi)$

Notation et relations entre les formes trigonométriques et algébriques

Propriété 1.4
Soit z un nombre complexe non nul, on note $\rho = |z|$ et θ un argument de z.

On a : $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ avec $\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\sin(\theta) \end{cases}$ soit $\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} \end{cases}$

Exemple

Considérons le nombre complexe $z = -1 + \sqrt{3}i$.

$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. On a donc : $\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Un argument de z est donc $\dfrac{2\pi}{3}$.

On a donc : $z = 2\left[\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$.

1.3.4 Forme exponentielle

Définition 1.14

Pour tout réel θ, on note : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Ainsi, si $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ alors $z = \rho e^{i\theta}$ (avec $\rho = |z|$).

Propriété 1.5

Soient $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls.

$zz' = \rho\rho' e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$; $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$.

Propriété 1.6 (formule de Moivre)

Soient θ un réel et n un entier relatif.

On a : $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Exercice 5

Montrez la propriété précédente.

Solution

$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Propriété 1.7 (formules d'Euler)

Pour tout réel θ, on a : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Exercice 6

Montrez la propriété précédente.

Solution

$z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$ donc $\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}=2\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$ soit $\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}=2\cos\theta$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}+\mathrm{e}^{-i\theta}}{2}=\cos\theta.$

$z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$ donc $\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}=2i\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$ soit $\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}=2i\sin\theta$ donc $\dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}=\sin\theta.$

Exercice 7

Soit $\theta\in\,]0;\pi[$. Écrivez sous forme exponentielle le nombre complexe $z=1+e^{-i\theta}$.

Solution

$$z=1+\mathrm{e}^{-i\theta}=\mathrm{e}^{\frac{-i\theta}{2}}\times\left(\mathrm{e}^{\frac{i\theta}{2}}+\mathrm{e}^{\frac{-i\theta}{2}}\right)=\mathrm{e}^{\frac{-i\theta}{2}}\times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

On a écrit z sous la forme $z=\rho\mathrm{e}^{i\theta}$, mais il faut vérifier que $\rho=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)>0.$

Il s'avère que $\theta\in\,]0;\pi[$ donc $\dfrac{\theta}{2}\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)>0.$

On peut donc conclure que $z=1+e^{-i\theta}$ s'écrit sous forme exponentielle $z{=}2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{-i\theta}{2}}$.

Application : Linéarisation d'un polynôme trigonométrique

La linéarisation d'un polynôme dont la variable est cos x ou sin x consiste à l'identifier à un polynôme du premier degré des variables cos x, sin x, cos($2x$), sin2(x)…

Cette méthode est très utile, notamment en intégration.

À noter que cette méthode utilise les formules d'Euler ainsi que la formule du binôme de Newton :

$(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\,b^{n-k}$ où $\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ qu'on peut retrouver en utilisant le triangle de Pascal, $n\in\mathbb{N}$.

Exemple

Linéarisons $\cos^4 x$.

On va utiliser les deux formules suivantes :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ et } (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$\text{Ainsi : } \cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$$

$$= \frac{(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3 e^{-ix} + 6(e^{ix})^2(e^{-ix})^2 + 4e^{ix}(e^{-ix})^3 + (e^{-ix})^4}{2^4}$$

$$\text{donc } \cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$\text{d'où } \cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6e^{0ix} + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}). \text{ On obtient :}$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}([e^{4ix} + e^{4ix}] + 4[e^{2ix} + e^{-2ix}] + 6) = \frac{1}{16}[2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6]$$

$$\text{ce qui permet de conclure que : } \cos^4 x = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.$$

1.3.5 Résolution d'équations

Racines carrées

Définition 1.15

Soit Z un nombre complexe donné.

On appelle racine carrée de Z, tout nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Méthode de détermination de racines carrées

Lors de la détermination de racines carrées d'un nombre Z, plusieurs cas peuvent se présenter :

- Z est un réel positif : $z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ et $z^2 = Z \Leftrightarrow z = \pm\sqrt{Z}$ $(Z > 0)$
- Z est un réel négatif : $z^2 = Z \Leftrightarrow z = \pm\, i\sqrt{-Z}$

Cas général :

Posons $z = a + ib$ et $Z = A + iB$.

On cherche z tel que : $z^2 = Z$ soit $(a + ib)^2 = A + iB$.

On cherche donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $a^2 + 2iab - b^2 = A + iB$.

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient : $\begin{cases} a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \end{cases}$.

Ces deux relations suffisent à déterminer les couples (a,b) mais il peut être utile d'utiliser une nouvelle relation découlant de l'utilisation des modules.

On a : $z^2 = Z$ donc $|z|^2 = |Z|$ soit $a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2}$.

Ainsi, pour déterminer une racine carrée de $z = a + ib$ de $Z = A + iB$, on va utiliser le système suivant :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = A \\ 2ab = B \\ a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2}. \end{cases}$$

Exemple

Déterminons les racines carrées du nombre complexe $4 - 3i$.

On cherche $z = a + ib$ tel que : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$.

Le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$ nous donne $\begin{cases} 2a^2 = 9 \\ 2b^2 = 1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a^2 = \dfrac{9}{2} \\ b^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$.

En outre, $2ab = -3$ donc $ab < 0$ ce qui permet de conclure que a et b sont de signes contraires.

On peut donc conclure que les racines carrées de $4 - 3i$ sont $\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ et $\dfrac{-3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i$.

- Tout nombre complexe Z non nul admet deux racines carrées complexes opposées.
- Ces deux racines sont réelles si et seulement si Z est un réel positif.
- Ces deux racines sont des imaginaires purs si et seulement si Z est un réel négatif.
- Si Z s'écrit sous forme exponentielle $Z = \rho e^{i\theta}$ alors $z = \pm\sqrt{\rho}\, e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Ainsi, $Z = \dfrac{9}{2} + \dfrac{9\sqrt{3}}{2}i = 9e^{i\frac{\pi}{3}}$ admet deux racines carrées : $3e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $-3e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Équations du second degré à coefficients complexes

Considérons un polynôme $az^2 + bz + c$ à coefficients complexes avec $a \neq 0$.

On rappelle que $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$ où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$ revient donc à résoudre $\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$. En utilisant les notions vues précédemment, on a :

Cas où Δ est réel

- si $\Delta > 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions : $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une unique solution : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions (non réelles) : $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Cas où Δ n'est pas réel

Dans ce cas, l'équation admet deux racines complexes : $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$

où δ est une des deux racines carrées (complexes) de Δ.

Exercice 8

Résolvez, dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante : $iz^2 + 2z - 4i + 4 = 0$.

Solution

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 2^2 - 4i(-4i + 4) = -12 - 16i$.

Δ n'est pas réel, donc cette équation admet deux solutions : $z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ où δ est une des deux racines carrées (complexes) de Δ.

Posons $\delta = a + ib$. On a : $\begin{cases} a^2 - b^2 = -12 \\ 2ab = -16 \\ a^2 + b^2 = 20 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 16. \\ ab < 0 \end{cases}$

On peut donc considérer $\delta = 2 - 4i$.

L'équation admet deux solutions :

$$z_1 = \frac{-2 - (2 - 4i)}{2i} = \frac{-4 + 4i}{2i} = 2 + 2i \text{ et } z_2 = \frac{-2 + (2 - 4i)}{2i} = \frac{-4i}{2i} = -2.$$

Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 1.16
Soit n un entier naturel non nul. Les racines n-ièmes de l'unité sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Théorème 1.2
L'équation $z^n = 1$ admet n solutions distinctes de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;2;.....;n-1\}$.
Les racines n-ièmes de l'unité sont situées sur le cercle unité et sont les n sommets d'un polygone régulier.

Démonstration

$$z^n = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z^n) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ n\arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{n} \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

On a donc : $z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \{0;1;2;.....;n-1\}$.

> **Exemple : racines cubiques de l'unité**
> Déterminons les solutions de l'équation $z^3 = 1$.
>
> Il y a trois racines cubiques de l'unité, de la forme $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0;1;2\}$.
>
> On a : $z_0 = 1$, $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.
>
> Les racines cubiques de l'unité, associées aux sommets d'un triangle équilatéral, sont :
> 1, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$.

Théorème 1.3
Soit a un nombre complexe de module ρ et d'argument θ.
L'équation $z^n = a$ admet n solutions distinctes de la forme $\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ avec

$k \in \{0;1;2;.....;n-1\}$.