

MATHS

MPSI - MP2I

Jean-Marie Monier | Guillaume Haberer

MATHS

MPSI - MP2I


MÉTHODES & EXERCICES

5^e édition

DUNOD

l'intégrale

Couverture : création Hokus Pokus, adaptation Studio Dunod

<p>Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.</p> <p>Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements</p>		<p>d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée.</p> <p>Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).</p>
--	--	--

© Dunod, 2021

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-082104-4

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

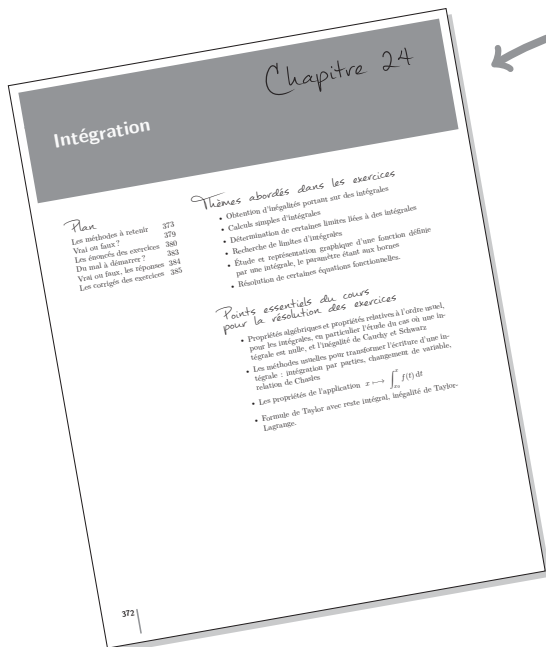
Table des matières

Pour bien utiliser cet ouvrage	vi	17 Arithmétique des polynômes, fractions rationnelles	265
Remerciements	ix	18 Analyse asymptotique	281
1 Raisonnement, vocabulaire ensembliste	1	19 Espaces vectoriels	301
2 Calculs algébriques et trigonométrie	19	20 Espaces vectoriels de dimension finie	313
3 Nombres complexes	37	21 Applications linéaires	324
4 Fonctions d'une variable réelle	54	22 Matrices	339
5 Calcul différentiel élémentaire	68	23 Groupe symétrique et déterminants	355
6 Fonctions usuelles	85	24 Intégration	372
7 Calculs de primitives	102	25 Dénombrements	392
8 Équations différentielles linéaires	121	26 Probabilités sur un univers fini	409
9 Nombres réels, suites numériques	141	27 Variables aléatoires	428
10 Limites, continuité	163	28 Couples de variables aléatoires	444
11 Dérivabilité	178	29 Espaces préhilbertiens réels	470
12 Convexité	193	30 Séries numériques	487
13 Arithmétique dans \mathbb{Z}	204	31 Familles sommables	509
14 Structures algébriques usuelles	218	32 Fonctions de deux variables réelles	525
15 Calcul matriciel et systèmes linéaires	233	Index	549
16 Algèbre des polynômes	250		

Compléments en ligne

Des compléments en ligne, disponibles sur la page de présentation de l'ouvrage du site de Dunod (<https://dunod.com/EAN/9782100821044>), vous donnent accès à des exercices de colles entièrement corrigés.

Pour bien utiliser cet ouvrage



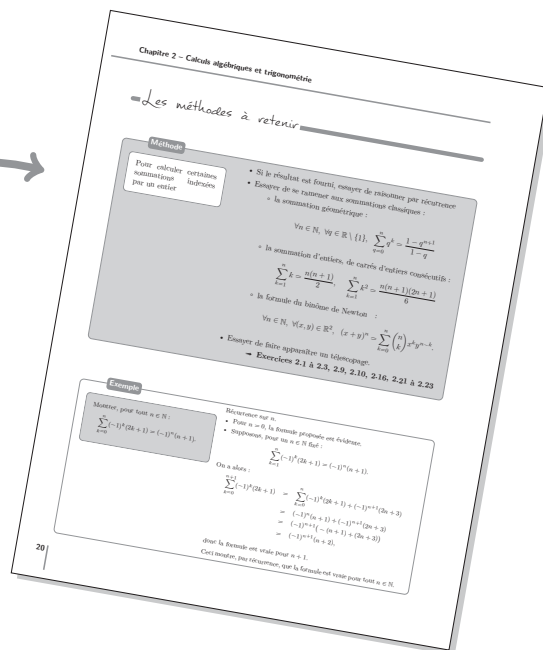
La page d'entrée de chapitre

Elle propose un plan du chapitre, les thèmes abordés dans les exercices, ainsi qu'un rappel des points essentiels du cours pour la résolution des exercices.

Les méthodes à retenir

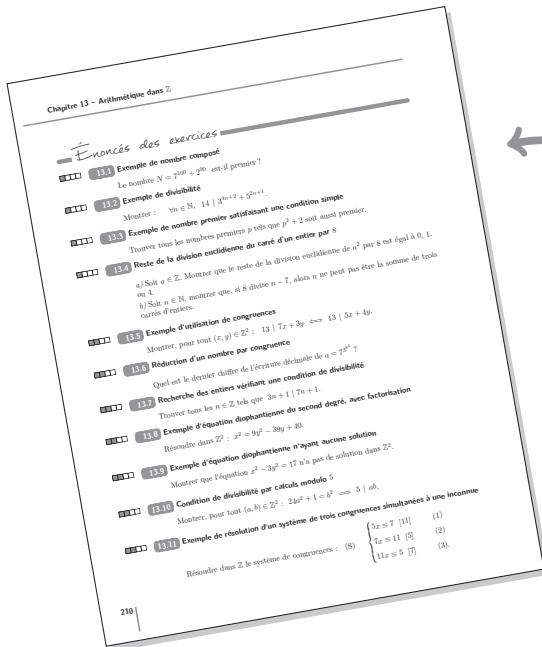
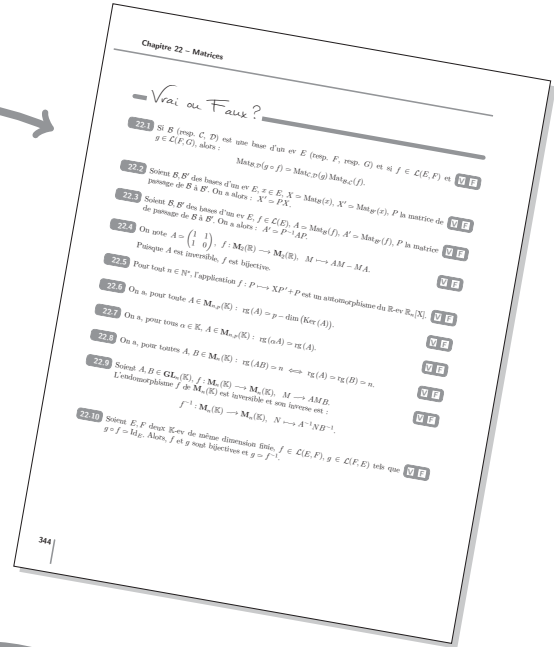
Cette rubrique constitue une synthèse des principales méthodes à connaître, détaillées étape par étape, et indique les exercices auxquels elles se rapportent.

Chaque méthode est illustrée par un ou deux exemples qui la suivent.



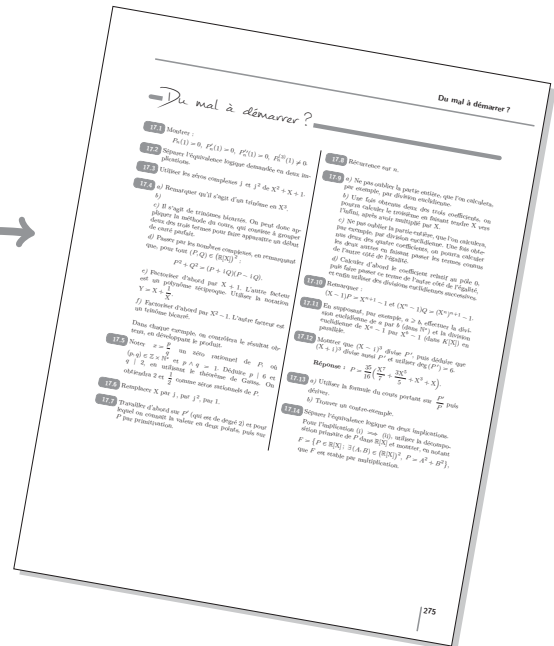
Vrai ou Faux ?

Dix questions pour vérifier la bonne compréhension du cours.



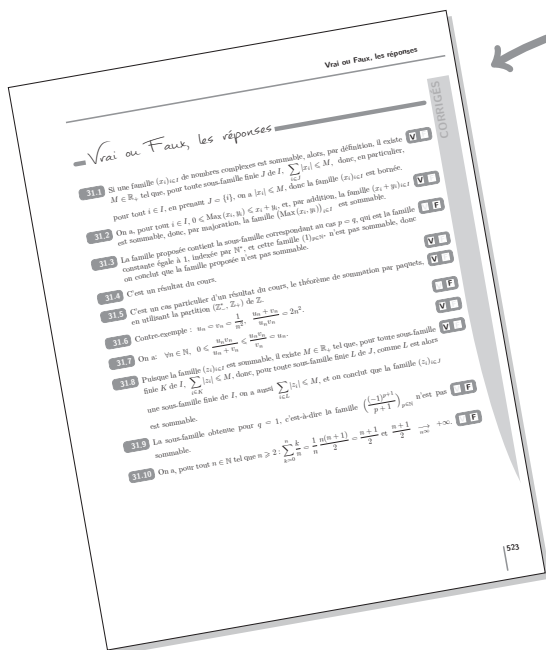
Énoncés des exercices

De nombreux exercices de difficulté croissante sont proposés pour s'entraîner. La difficulté de chaque exercice est indiquée sur une échelle de 1 à 4.



Du mal à démarrer ?

Des conseils méthodologiques sont proposés pour bien aborder la résolution des exercices.

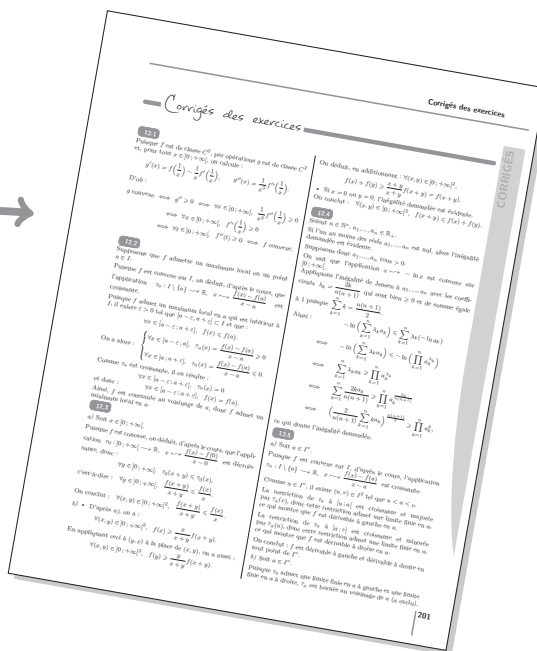


Vrai ou Faux, les réponses

Chaque affirmation vraie est justifiée par une référence au cours ou une courte démonstration, et chaque affirmation fautive est réfutée par la production d'un contre-exemple explicite.

Corrigés des exercices

Tous les exercices sont corrigés de façon détaillée.



Remerciements

Nous tenons ici à exprimer notre gratitude aux nombreux collègues qui ont accepté de réviser des parties du manuscrit :

Marc Albrecht, Bruno Arzac, Jean-Philippe Berne, Jacques Blanc, Gérard Bourgin, Sophie Cohéléach, Carine Courant, Sylvain Delpech, Hermin Durand, Jean Feyler, Viviane Gaggioli, Marguerite Gauthier, Daniel Genoud, André Laffont, Cécile Lardon, Hadrien Larôme, Ibrahim Rihaoui, René Roy, Philippe Saadé, Marie-Dominique Siéfert, Marie-Pascale Thon, Audrey Verdier.

Raisonnement, vocabulaire ensembliste

Chapitre 1

Plan

Les méthodes à retenir	2
Vrai ou faux ?	7
Les énoncés des exercices	8
Du mal à démarrer ?	12
Vrai ou faux, les réponses	13
Les corrigés des exercices	14

Thèmes abordés dans les exercices

- Mise en œuvre, sur des exemples simples, des différents types de raisonnement
- Égalités et inclusions d'ensembles obtenus par opérations sur des parties d'un ensemble
- Injectivité, surjectivité, bijectivité
- Image directe, image réciproque d'une partie par une application.

Points essentiels du cours pour la résolution des exercices

- Définition et propriétés des opérations entre ensembles, \cap , \cup , complémentaire, \setminus
- Définition de la fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble
- Définition du produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles
- Définition et propriétés de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité pour les applications
- Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie par une application
- Relations d'équivalence, relations d'ordre.

Les méthodes à retenir

Méthode

Pour travailler de manière générale sur des ensembles

Essayer de passer par les éléments des ensembles, ou de calculer globalement sur les ensembles. La deuxième voie est en général plus courte et plus claire (si elle est praticable).

⇒ Exercices 1.1, 1.2, 1.7, 1.8, 1.16 à 1.18

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer : $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$.

On a :

$$\begin{aligned}
 (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) &= (A \cap \bar{C}) \setminus (B \cap \bar{C}) \\
 &= (A \cap \bar{C}) \cap \overline{B \cap \bar{C}} \\
 &= (A \cap \bar{C}) \cap (\bar{B} \cup C) \\
 &= (A \cap \bar{C} \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C} \cap C) \\
 &= A \cap \bar{B} \cap \bar{C} \\
 &= A \cap \overline{B \cup C} \\
 &= A \setminus (B \cup C).
 \end{aligned}$$

Méthode

Pour établir une égalité d'ensembles

Essayer de :

- soit montrer directement l'égalité
- soit montrer deux inclusions : $A \subset B$ et $B \subset A$
- soit utiliser les fonctions indicatrices des parties d'un ensemble.

⇒ Exercices 1.2, 1.7, 1.8, 1.12, 1.18

Dans chacune des deux premières options, on essaie de passer par les éléments ou de calculer globalement sur les ensembles.

Exemple

Soient E un ensemble, $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer :

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C).$$

On a :

$$\begin{aligned}
 (A \setminus B) \cup (A \setminus C) &= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap \bar{C}) \\
 &= A \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) \\
 &= A \cap \overline{B \cap C} \\
 &= A \setminus (B \cap C).
 \end{aligned}$$

Exemple

Montrer :

$$\{y \in \mathbb{R}; \exists x \in [-1; 2], y = x^2\} = [0; 4].$$

• Soit $y \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $x \in [-1; 2]$ tel que $y = x^2$.

Si $x \in [-1; 0]$, alors $y \in [0; 1]$.

Si $x \in [0; 2]$, alors $y \in [0; 4]$.

On déduit $y \in [0; 4]$.

Ceci montre que le premier ensemble est inclus dans le second.

• Réciproquement, soit $y \in [0; 4]$.

En notant $x = \sqrt{y}$, on a $x \in [0; 2] \subset [-1; 2]$ et $y = x^2$.

Ceci montre que le second ensemble est inclus dans le premier.

On conclut à l'égalité demandée.

Méthode

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence (faible), qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (*hérédité*).

→ Exercice 1.5

Exemple

On considère la suite de Fibonacci $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+2} = \phi_{n+1} + \phi_n.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n = (-1)^n.$$

Initialisation :

Pour $n = 0$, on a : $\phi_1^2 - \phi_2\phi_0 = 1^2 - 1 \cdot 0 = 1 = (-1)^0$, donc la formule est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \phi_{n+2}^2 - \phi_{n+3}\phi_{n+1} &= \phi_{n+2}^2 - (\phi_{n+2} + \phi_{n+1})\phi_{n+1} \\ &= (\phi_{n+2}^2 - \phi_{n+2}\phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2}(\phi_{n+2} - \phi_{n+1}) - \phi_{n+1}^2 \\ &= \phi_{n+2}\phi_n - \phi_{n+1}^2 \\ &= -(\phi_{n+1}^2 - \phi_{n+2}\phi_n) \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n+1$.

Ceci montre, par récurrence, que la formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Méthode

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence à deux pas, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie (*hérédité*).

→ Exercice 1.10

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}.$$

Montrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0.$$

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1 > 0$, et, pour $n = 2$, on a $u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} = \frac{1}{2} > 0$ donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et pour $n = 2$.

Hérédité : Supposons que la propriété soit vraie pour n et $n + 1$, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On a donc $u_n > 0$ et $u_{n+1} > 0$, d'où $\frac{u_{n+1} + u_n}{2} > 0$, donc la propriété est vraie pour $n + 2$.

Ceci montre, par récurrence à deux pas, que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

Montrer que :

Pour montrer, par récurrence forte, qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n \geq n_0$

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*)
- pour tout entier n fixé tel que $n \geq n_0$, si $\mathcal{P}(n_0), \dots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie (*hérédité*).

⇒ Exercice 1.11

Exemple

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $0 < u_1 \leq 1$ car $u_1 = 1$.

Hérédité : Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, que l'on ait :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, 0 < u_k \leq 1.$$

On a alors : $u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n} > \frac{0 + \dots + 0}{n^n} = 0$

et $u_{n+1} = \frac{u_1 + u_2^2 + \dots + u_n^n}{n^n} \leq \frac{1 + \dots + 1}{n^n} = \frac{n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-1}} \leq 1$.

Ceci montre, par récurrence forte : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n \leq 1$.

Méthode

Essayer de :

Pour résoudre une question portant sur injectivité, surjectivité, bijectivité, d'applications dans un cadre général

- utiliser les définitions et les propositions du cours sur la composée de deux applications injectives (resp. surjectives)
- utiliser le résultat de l'exercice classique 1.14 (en le redémontrant).

⇒ Exercices 1.3, 1.14, 1.15

Exemple

Soient E un ensemble, $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f \circ f = \text{Id}_E$.

Montrer que f est bijective et que :

$$f^{-1} = f.$$

★ • *Injectivité* : Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$.

On a alors :

$$x_1 = (f \circ f)(x_1) = f(f(x_1)) = f(f(x_2)) = (f \circ f)(x_2) = x_2.$$

Ceci montre que f est injective.

• *Surjectivité* : Soit $y \in E$.

On a : $y = (f \circ f)(y) = f(f(y))$, donc il existe $x \in E$ (on peut prendre $x = f(y)$) tel que $y = f(x)$. Ceci montre que f est surjective.

On conclut que f est bijective.

★ Puisque f est bijective, on peut utiliser f^{-1} et on a :

$$f^{-1} = f^{-1} \circ \text{Id}_E = f^{-1} \circ (f \circ f) = (f^{-1} \circ f) \circ f = \text{Id}_E \circ f = f.$$

Méthode

Pour manipuler, dans un cadre général, des images directes, des images réciproques de parties par des applications

Appliquer les définitions.

Pour $f : E \rightarrow F$, $A \in \mathcal{P}(E)$, $A' \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$f(A) = \{y \in F ; \exists a \in A, y = f(a)\},$$

$$f^{-1}(A') = \{x \in E ; f(x) \in A'\}.$$

Autrement dit :

$$\text{pour tout } y \in F : y \in f(A) \iff (\exists a \in A, y = f(a))$$

$$\text{et, pour tout } x \in E : x \in f^{-1}(A') \iff f(x) \in A'.$$

→ Exercices 1.16, 1.17

Exemple

Soient E, F deux ensembles, une application $f : E \rightarrow F$ et $A' \in \mathcal{P}(F)$.

Montrer :

$$f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}.$$

On a, pour tout $x \in E$:

$$x \in f^{-1}(\overline{A'}) \iff f(x) \in \overline{A'}$$

$$\iff f(x) \notin A'$$

$$\iff \text{Non } (f(x) \in A')$$

$$\iff \text{Non } (x \in f^{-1}(A'))$$

$$\iff x \in \overline{f^{-1}(A')},$$

d'où l'égalité voulue.

Méthode

Pour montrer qu'une relation \mathcal{R} , dans un ensemble E , est une relation d'équivalence

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- \mathcal{R} est réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- \mathcal{R} est symétrique : $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \implies y \mathcal{R} x)$
- \mathcal{R} est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z.$

→ Exercice 1.6

Exemple

On note \mathcal{R} la relation définie dans \mathbb{R} par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \mathcal{R} y \iff |x| = |y|).$$

Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence dans \mathbb{R} et déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo \mathcal{R} .

- ★ • On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = |x|$, d'où $x \mathcal{R} x$, donc \mathcal{R} est réflexive.
- On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \mathcal{R} y \iff |x| = |y| \iff |y| = |x| \iff y \mathcal{R} x,$$

donc \mathcal{R} est symétrique.

- On a, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \iff \begin{cases} |x| = |y| \\ |y| = |z| \end{cases} \implies |x| = |z| \iff x \mathcal{R} z,$$

donc \mathcal{R} est transitive.

On conclut que \mathcal{R} est une relation d'équivalence dans \mathbb{R} .

- ★ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe de x modulo \mathcal{R} est :

$$\hat{x} = \{y \in \mathbb{R}; x \mathcal{R} y\} = \{y \in \mathbb{R}; |x| = |y|\} = \begin{cases} \{x, -x\} & \text{si } x \neq 0 \\ \{0\} & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Méthode

Pour montrer qu'une relation \mathcal{R} , dans un ensemble E , est une relation d'ordre

Revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que :

- \mathcal{R} est réflexive : $\forall x \in E, x \mathcal{R} x$
- \mathcal{R} est antisymétrique : $\forall (x, y) \in E^2, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \implies x = y$
- \mathcal{R} est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3, \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \implies x \mathcal{R} z$.

→ Exercices 1.9, 1.13

Exemple

On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et \leq la relation définie dans E par, pour toutes $f, g \in E$:

$$f \leq g \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x)).$$

Montrer que \leq est une relation d'ordre dans E . Cet ordre est-il total ?

- ★ • On a, pour toute $f \in E$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x)$, d'où $f \leq f$, donc \leq est réflexive.

- On a, pour toutes $f, g \in E$:

$$\begin{cases} f \leq g \\ g \leq f \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f(x) \end{cases} \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)) \iff f = g,$$

donc \leq est antisymétrique.

- On a, pour toutes $f, g, h \in E$:

$$\begin{cases} f \leq g \\ g \leq h \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq g(x) \\ \forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq h(x) \end{cases} \implies (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq h(x)) \iff f \leq h,$$

donc \leq est transitive.

Ceci montre que \leq est une relation d'ordre dans E .

- ★ Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$.

On a $f(1) = 0 < 1 = g(1)$, donc on n'a pas $g \leq f$.

On a $f(1) = 0 > -1 = g(-1)$, donc on n'a pas $f \leq g$.

On conclut que l'ordre \leq sur E n'est pas total.

Vrai ou Faux ?

1.1 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E , on a : $A \cap B = \emptyset \iff B \subset \bar{A}$.

V F

1.2 Pour toutes parties A, B d'un ensemble E , on a : $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

V F

1.3 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$.

V F

1.4 $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leq y$.

V F

1.5 Si les applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective.

V F

1.6 Si l'application composée $g \circ f$ est injective, alors f et g sont injectives.

V F

1.7 Si une application $f : E \rightarrow E$ vérifie $f \circ f = \text{Id}_E$, alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

V F

1.8 Si une application $f : E \rightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$, alors $f = \text{Id}_E$.

V F

1.9 Soient E, F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A, B des parties de E .
On a alors :

V F

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

1.10 Soient E, F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A, B des parties de E .
On a alors :

V F

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$

Énoncés des exercices



1.1 Exemple de calcul ensembliste : inclusion

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

- Montrer : $(A \cup B) \cap C \subset A \cup (B \cap C)$.
- Établir qu'il y a égalité dans l'inclusion précédente si et seulement si : $A \subset C$.



1.2 Exemple de calcul ensembliste : équivalence entre deux égalités

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer :

$$A \cup B = A \cup C \iff A \cup \overline{B} = A \cup \overline{C}.$$



1.3 Exemple d'une restriction bijective

On considère la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} donnée par : $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$.

- Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté a , n'ayant pas d'image par f .
- Montrer qu'il existe un réel et un seul, noté b , n'ayant pas d'antécédent par f .
- Montrer que la restriction g de f à $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{b\}$ à l'arrivée est bijective, et préciser l'application réciproque g^{-1} de g .



1.4 Exemple de calcul de composée de deux applications

On note $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ les applications définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = 1 + x, \quad g(x) = x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?



1.5 Exemple de raisonnement par récurrence (faible)

On considère la suite de Lucas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $L_0 = 2, L_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_{n+2} = L_{n+1} + L_n.$$

Montrer, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = 5(-1)^{n+1}$
- $\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_n L_{n+1} + 2$
- $L_{2n} = L_n^2 - 2(-1)^n$ et $L_{2n+1} = L_n L_{n+1} - (-1)^n$.

**1.6 Exemple de relation d'équivalence dans \mathbb{R}**

On note \mathcal{R} la relation définie dans \mathbb{R} par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \mathcal{R} y \iff x^2 - 2x = y^2 - 2y).$$

- a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence dans \mathbb{R} .
 b) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence de x modulo \mathcal{R} .

**1.7 Réunion ou intersection de produits cartésiens**

Soient E, F deux ensembles, A_1, A_2 des parties de E , B_1, B_2 des parties de F .

- a) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.
 b) 1) Montrer : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.
 2) A-t-on nécessairement : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = (A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$?

**1.8 Équivalence entre trois assertions faisant intervenir des différences ensemblistes**

Soient E un ensemble, $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer que les trois assertions suivantes sont deux à deux équivalentes :

- 1) $A \setminus B \subset C$, 2) $A \setminus C \subset B$, 3) $A \subset B \cup C$.

**1.9 Exemple de relation d'ordre sur les entiers**

On considère la relation \mathcal{R} définie dans \mathbb{N}^* par : $x \mathcal{R} y \iff (\exists n \in \mathbb{N}^*, y = x^n)$.

- a) Montrer que \mathcal{R} est un ordre sur \mathbb{N}^* .
 b) Est-ce que \mathcal{R} est total ?

**1.10 Exemple de raisonnement par récurrence à deux pas**

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

**1.11 Exemple de raisonnement par récurrence forte**

On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!(n-k)!}.$$

Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.



1.12 Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble

Soit E un ensemble.

On rappelle que, pour toute $A \in \mathcal{P}(E)$, la fonction indicatrice de A est l'application

$$\mathbf{1}_A : E \mapsto \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A. \end{cases}$$

On note $\mathbf{1}$ l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0, 1\}$ constante égale à 1.

a) Montrer, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$:

$$A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A,$$

$$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B.$$

b) En déduire, pour toutes $A, B \in \mathcal{P}(E)$: $A \cap (A \cup B) = A$ et $A \cup (A \cap B) = A$.



1.13 Exemple de relation d'ordre sur un ensemble de suites réelles

On note E l'ensemble des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$ et on note \mathcal{R} la relation définie dans E par, pour tout $(u, v) \in E^2$, $u \mathcal{R} v$ si et seulement si $v - u$ est croissante.

a) Montrer que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur E .

b) L'ordre \mathcal{R} est-il total ?

c) Montrer : $\forall (u, v) \in E^2, (u \mathcal{R} v \implies u \leq v)$.

d) A-t-on : $\forall (u, v) \in E^2, (u \leq v \implies u \mathcal{R} v)$?



1.14 Composée injective, composée surjective

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ des applications. Montrer :

a) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective

b) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective

c) si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.



1.15 Applications : composition, injectivité, surjectivité

Soient E, F des ensembles, $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ des applications.

a) Montrer que, si $f \circ g \circ f = f$ et si f est injective, alors g est surjective.

b) Montrer que, si $g \circ f \circ g = g$ et si g est surjective, alors f est injective.



1.16 Images directes de parties par une application

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \rightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A, B de E :

a) $A \subset B \implies f(A) \subset f(B)$

b) $A \subset f^{-1}(f(A))$

c) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

d) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

**1.17 Images réciproques de parties par une application**

Soient E, E' deux ensembles, $f : E \rightarrow E'$ une application. Montrer, pour toutes parties A', B' de E :

- a) $A' \subset B' \implies f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$
- b) $f(f^{-1}(A')) \subset A'$
- c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$
- d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$.

**1.18 Différence symétrique, associativité**

Soit E un ensemble. On note, pour toutes parties A, B de E :

$$A \Delta B = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)},$$

appelée *différence symétrique* de A et B .

a) *Deux exemples* : Déterminer $A \Delta B$ dans les deux exemples suivants :

- 1) $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$
- 2) $E = \mathbb{R}$, $A =]-\infty; 2]$, $B = [1; +\infty[$.

b) Établir : $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$.

c) Montrer, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$: $\mathbf{1}_{A \Delta B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2 \cdot \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

d) En déduire que la loi Δ est associative dans $\mathcal{P}(E)$, c'est-à-dire :

$$\forall (A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3, (A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C).$$

Du mal à démarrer ?

- 1.1** a) Utiliser la distributivité de \cap sur \cup .
 b) Séparer l'équivalence logique en deux implications.
- 1.2** *Première méthode :*
 Raisonner par équivalences logiques en passant aux complémentaires.
Deuxième méthode :
 Supposer $A \cup B = A \cup C$.
 * Partir d'un élément quelconque x de $A \cup \overline{B}$ et raisonner par l'absurde, pour déduire $x \in A \cup \overline{C}$.
 * L'autre inclusion s'en déduit en échangeant B et C .
- 1.3** a) $a = 2$. b) $b = 3$.
 c) À partir de $y = f(x)$, calculer x en fonction de y .
- 1.4** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$, et trouver un $x \in \mathbb{R}$ tel que ces deux résultats soient différents.
- 1.5** Récurrence (faible) sur n , pour chacune des trois questions.
 Pour c), utiliser a).
- 1.6** a) Revenir à la définition d'une relation d'équivalence.
 Noter $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$, pour la commodité.
 b) Revenir à la définition de la classe d'équivalence \hat{x} de x modulo $\mathcal{R} : \forall y \in \mathbb{R}, (y \in \hat{x} \iff x \mathcal{R} y)$.
- 1.7** a) Raisonner par équivalences logiques successives, en partant de $(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$.
 b) 1) Même méthode qu'en a).
 2) Envisager un élément de $A_1 \times B_2$.
- 1.8** Montrer 1) \implies 3) et 3) \implies 1) en passant par les éléments, puis échanger B et C pour en déduire 2) \iff 3).
- 1.9** a) Revenir à la définition d'une relation d'ordre.
 b) Envisager les éléments 1 et 2 de \mathbb{N}^* , par exemple.
- 1.10** Récurrence à deux pas sur n .
- 1.11** Récurrence forte sur n .
- 1.12** a) • Un sens est évident.
 Réciproquement, supposer $1_A = 1_B$ et partir d'un élément quelconque a de A , pour montrer $A \subset B$.
 • Pour $x \in E$, séparer en cas : $x \in A$, $x \notin A$.
 • Pour $x \in E$, séparer encore en cas : $x \in A \cap B$, $x \notin A \cap B$.
 • Passer aux complémentaires à partir du résultat précédent.

- Utiliser les résultats précédents.
- b) Calculer $1_{A \cap (A \cup B)}$ et $1_{A \cup (A \cap B)}$.
- 1.13** a) Revenir à la définition d'une relation d'ordre.
 b) Envisager u et v de façon que $v - u$ ne soit pas monotone.
 c) Remarquer que, si $u \mathcal{R} v$, alors $v - u$ est croissante et $u_0 = v_0$.
 d) Envisager u, v de façon que $v \geq u$ et que $v - u$ ne soit pas croissante.
- 1.14** a) Revenir aux définitions.
 b) Revenir aux définitions.
 c) Se déduit directement de a) et b).
- 1.15** a) Partir d'un élément x de E , considérer $f(x)$ et déduire $x = g(f(x))$.
 b) Partir de $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, utiliser la surjectivité de g , puis $g = g \circ f \circ g$, et déduire $x_1 = x_2$.
- 1.16** a) Supposer $A \subset B$.
 Partir d'un élément quelconque y de $f(A)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f .
 b) Partir de $a \in A$ et utiliser les définitions.
 c) • Montrer, en utilisant a) :

$$f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$
 - Réciproquement, partir de $y \in f(A \cup B)$ et utiliser la définition de l'image directe d'une partie de E par f .- d) Utiliser a).

1.17 a) Supposer $A' \subset B'$.
 Partir d'un éléments quelconque x de $f^{-1}(A')$ et utiliser la définition de l'image réciproque d'une partie de F par f .
 b) Partir de $y \in f(f^{-1}(A'))$ et utiliser les définitions.
 c) Raisonnement par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cup B')$ et en appliquant les définitions.
 d) Raisonnement par équivalences logiques successives en partant de $x \in f^{-1}(A' \cap B')$ et en appliquant les définitions.

1.18 a) **Réponses :**
 1) $A \Delta B = \{2, 3\}$,
 2) $A \Delta B =] - \infty ; 1[\cup] 2 ; +\infty [$.
 b) Calculer $A \Delta B$ d'après sa définition, en utilisant les formules sur le calcul sur les ensembles.
 c) Utiliser b) et les formules sur les fonctions caractéristiques (cf. Exercice 1.12).

En particulier, pour tous ensembles X, Y :

$$\mathbf{1}_{\overline{X}} = 1 - \mathbf{1}_X, \quad \mathbf{1}_{X \cap Y} = \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y, \\ \mathbf{1}_{X \cup Y} = \mathbf{1}_X + \mathbf{1}_Y - \mathbf{1}_X \mathbf{1}_Y.$$

d) Calculer les fonctions caractéristiques des deux membres.

Vrai ou Faux, les réponses

- 1.1** $B \subset \overline{A} \iff (\forall x \in B, x \notin A) \iff (\text{Non}(\exists x \in B, x \in A)) \iff (\text{Non}(A \cap B \neq \emptyset)) \iff A \cap B = \emptyset.$ **V F**
- 1.2** Contre-exemple : $E = \{1, 2\}, A = \{1\}, B = \{2\}.$
La formule correcte est : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$ **V F**
- 1.3** Par exemple, $y = x + 1.$ **V F**
- 1.4** Il n'existe pas de réel y fixé plus grand que tout réel $x.$ **V F**
- 1.5** C'est un résultat du cours. **V F**
- 1.6** Contre-exemple : $E = F = G = \mathbb{R}, f : x \mapsto e^x, g : y \mapsto |y|.$
On a alors $g \circ f : x \mapsto |e^x| = e^x, g \circ f$ est injective, mais g ne l'est pas. **V F**
- 1.7** L'application f est injective, car, pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$, si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, donc $x_1 = x_2.$ **V F**
L'application f est surjective car, pour tout $y \in E$, on a $y = f(f(y)).$
Il en résulte que f est bijective, puis, en composant à gauche par f^{-1} , on obtient $f = f^{-1}.$
- 1.8** Contre-exemple : $E = \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0.$ **V F**
- 1.9** Soit $y \in f(A \cup B).$ Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x).$ On a alors $x \in A$ d'où $f(x) \in A$, ou $x \in B$ d'où $f(x) \in f(B)$, et donc : $f(x) \in f(A) \cup f(B).$ On obtient $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B).$ **V F**
Réciproquement, soit $y \in f(A) \cup f(B).$ On a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B).$ Si $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, d'où $x \in A \cup B$ et $y = f(x)$, donc $y \in f(A \cup B).$ De même, si $y \in f(B)$, on déduit $y \in f(A \cup B).$ On obtient $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B).$
Par double inclusion, on conclut : $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$
- 1.10** Contre-exemple : $E = F = \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, A = \mathbb{R}_-, B = \mathbb{R}_+.$ **V F**
On a alors : $A \cap B = \{0\}, f(A \cap B) = \{0\}, f(A) = \mathbb{R}_+, f(B) = \mathbb{R}_+, f(A) \cap f(B) = \mathbb{R}_+.$

Corrigés des exercices

1.1

a) On a, par distributivité de \cap sur \cup :

$$(A \cup B) \cap C = \underbrace{(A \cap C)}_{\subset A} \cup (B \cap C) \subset A \cup (B \cap C).$$

b) • Supposons $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$.

Soit $x \in A$.

Alors, $x \in A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$, donc $x \in C$.

Ceci montre : $A \subset C$.

• Réciproquement, supposons $A \subset C$.

On a alors, par distributivité de \cap sur \cup :

$$(A \cup B) \cap C = \underbrace{(A \cap C)}_{=A} \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap C).$$

On conclut qu'il y a égalité dans l'inclusion obtenue en a) si et seulement si $A \subset C$.

1.2

En appliquant la première implication avec $(\overline{B}, \overline{C})$ à la place de (B, C) , on obtient la seconde implication.

Il suffit donc de montrer la première implication.

• *Première méthode : par les ensembles, globalement*

On a :

$$\begin{aligned} A \cup B &= A \cup C \\ \Rightarrow \overline{A \cup B} &= \overline{A \cup C} \\ \Rightarrow \overline{A} \cap \overline{B} &= \overline{A} \cap \overline{C} \\ \Rightarrow A \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) &= A \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \\ \Rightarrow (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{B}) &= (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{C}) \\ \Rightarrow A \cup \overline{B} &= A \cup \overline{C}. \end{aligned}$$

• *Deuxième méthode, par les éléments*

On suppose $A \cup B = A \cup C$.

★ Soit $x \in A \cup \overline{B}$. Alors $x \in A$ ou $x \in \overline{B}$.

Si $x \in A$, alors $x \in A \cup \overline{C}$.

Supposons $x \notin A$, donc $x \in \overline{B}$.

Raisonnons par l'absurde : supposons $x \notin A \cup \overline{C}$.

Alors, $x \in A \cup \overline{C} = \overline{A} \cap C$, donc $x \in C$,

puis $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cup B$, contradiction avec $x \notin A$ et $x \notin B$.

Ce raisonnement par l'absurde montre : $x \in A \cup \overline{C}$, et on a donc établi l'inclusion $A \cup \overline{B} \subset A \cup \overline{C}$.

★ Par rôles symétriques de B et C dans l'égalité d'hypothèse $A \cup B = A \cup C$, on a alors aussi l'autre inclusion, d'où l'égalité.

1.3

a) Il est clair que : $a = 2$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff xy - 2y = 3x - 1 \\ &\iff xy - 3x = 2y - 1 \iff (y-3)x = 2y - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Si } y \neq 3, \text{ on a : } y = f(x) \iff x = \frac{2y-1}{y-3}$$

donc y admet un antécédent et un seul par f , qui est $\frac{2y-1}{y-3}$.

Si $y = 3$, alors : $y = f(x) \iff 0x = 5$,

donc y n'a pas d'antécédent par f .

Il existe donc un réel et un seul, $b = 3$, n'ayant pas d'antécédent par f .

$$c) \text{ L'application } g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}, x \mapsto \frac{3x-1}{x-2}$$

est la restriction de f à $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ au départ et à $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ à l'arrivée.

On a, pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{2\}) \times (\mathbb{R} \setminus \{3\})$:

$$y = g(x) \iff y = \frac{3x-1}{x-2} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$

Ainsi, tout élément y de l'arrivée admet un antécédent et un seul par g , donc g est bijective, et l'application réciproque de g est : $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, y \mapsto \frac{2y-1}{y-3}$.

1.4

• On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 1 + x^2 \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1+x) = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2. \end{cases}$$

• Par exemple : $(f \circ g)(1) = 2$ et $(g \circ f)(1) = 4$, donc : $f \circ g \neq g \circ f$.

1.5

a) • *Initialisation* :

Pour $n = 0$, on a :

$$L_{n+1}^2 - L_n L_{n+2} = L_1^2 - L_0 L_2 = 1^2 - 2 \cdot 3 = -5$$

et $5(-1)^{n+1} = -5$,

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

$$\begin{aligned} \text{On a alors : } & L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+3} \\ &= L_{n+2}^2 - L_{n+1}(L_{n+2} + L_{n+1}) \\ &= (L_{n+2}^2 - L_{n+1} L_{n+2}) - L_{n+1}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= L_{n+2}(L_{n+2} - L_{n+1}) - L_{n+1}^2 \\ &= L_{n+2}L_n - L_{n+1}^2 \\ &= -(L_{n+1}^2 - L_nL_{n+2}) \\ &= -(5(-1)^{n+1}) = 5(-1)^{n+2}, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n , que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) • *Initialisation* :

Pour $n = 0$:
$$\sum_{k=0}^n L_k^2 = L_0^2 = 2^2 = 4,$$

et :
$$L_n L_{n+1} + 2 = L_0 L_1 + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4,$$

donc la formule est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} L_k^2 &= \left(\sum_{k=0}^n L_k^2 \right) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + 2) + L_{n+1}^2 \\ &= (L_n L_{n+1} + L_{n+1}^2) + 2 \\ &= L_{n+1}(L_n + L_{n+1}) + 2 = L_{n+1}L_{n+2} + 2, \end{aligned}$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n , que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) • *Initialisation* :

Pour $n = 0$:
$$\begin{cases} L_{2n} = L_0 = 2 \\ L_n^2 - 2(-1)^n = 2^2 - 2 = 2 \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} L_{2n+1} = L_1 = 1 \\ L_n L_{n+1} - (-1)^n = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \end{cases}$$

donc la formule (système de deux formules) est vraie pour $n = 0$.

• *Hérédité* :

Supposons la formule vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé.

On a alors :

$$\begin{aligned} L_{2n+2} &= L_{2n+1} + L_{2n} \\ &= (L_n L_{n+1} - (-1)^n) + (L_n^2 - 2(-1)^n) \\ &= (L_n L_{n+1} + L_n^2) - 3(-1)^n \\ &= L_n(L_{n+1} + L_n) - 3(-1)^n \\ &= L_n L_{n+2} - 3(-1)^n \\ &= (L_{n+1}^2 - 5(-1)^{n+1}) - 3(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2 + 2(-1)^n \\ &= L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{2n+3} &= L_{2n+2} + L_{2n+1} \\ &= (L_{n+1}^2 - 2(-1)^{n+1}) + (L_n L_{n+1} - (-1)^n) \\ &= L_{n+1}(L_{n+1} + L_n) - (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$$= L_{n+1}L_{n+2} - (-1)^{n+1},$$

donc la formule est vraie pour $n + 1$.

Ceci montre, par récurrence sur n , que la formule proposée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.6

a) Notons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2x$.

1) *Réflexivité* :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x)$, donc $x \mathcal{R} x$.

2) *Symétrie* :

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \mathcal{R} y$.

On a alors $f(x) = f(y)$, donc $f(y) = f(x)$, d'où $y \mathcal{R} x$.

3) *Transitivité* :

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$.

On a alors $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$, donc $f(x) = f(z)$, d'où $x \mathcal{R} z$.

On conclut : \mathcal{R} est une relation d'équivalence dans \mathbb{R} .

b) Soit $x \in \mathbb{R}$.

Notons \hat{x} la classe d'équivalence de x modulo \mathcal{R} .

On a, pour tout $y \in \mathbb{R} : y \in \hat{x}$

$$\begin{aligned} &\iff x \mathcal{R} y \\ &\iff x^2 - 2x = y^2 - 2y \\ &\iff x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0 \\ &\iff (x - y)(x + y - 2) = 0 \\ &\iff (y = x \text{ ou } y = 2 - x). \end{aligned}$$

On conclut :
$$\hat{x} = \begin{cases} \{1\} & \text{si } x = 1 \\ \{x, 2 - x\} & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

Il en résulte que \hat{x} est de cardinal 1 si $x = 1$, de cardinal 2 si $x \neq 1$.

1.7

a) On a, pour tout $(a, b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} &(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) \\ &\iff ((a, b) \in A_1 \times B_1 \text{ et } (a, b) \in A_2 \times B_2) \\ &\iff (a \in A_1 \text{ et } b \in B_1) \text{ et } (a \in A_2 \text{ et } b \in B_2) \\ &\iff (a \in A_1 \text{ et } a \in A_2) \text{ et } (b \in B_1 \text{ et } b \in B_2) \\ &\iff (a \in A_1 \cap A_2 \text{ et } b \in B_1 \cap B_2) \\ &\iff (a, b) \in (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2), \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$.

b) 1) On a, pour tout $(a, b) \in E \times F$:

$$\begin{aligned} &(a, b) \in (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) \\ &\iff ((a, b) \in A_1 \times B_1 \text{ ou } (a, b) \in A_2 \times B_1) \\ &\iff ((a \in A_1 \text{ ou } a \in A_2) \text{ et } b \in B_1) \\ &\iff (a \in A_1 \cup A_2 \text{ et } b \in B_1) \\ &\iff (a, b) \in (A_1 \cup A_2) \times B_1, \end{aligned}$$

donc : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_1) = (A_1 \cup A_2) \times B_1$.

2) L'ensemble $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2)$ contient, entre autres, les couples (a, b) où $a \in A_1$ et $b \in B_2$, et ces couples ne sont pas nécessairement dans $A_1 \times B_1$ ou $A_2 \times B_2$.

Donnons un contre-exemple.

Notons $E = F = \{0, 1\}$, $A_1 = B_1 = \{0\}$, $A_2 = B_2 = \{0, 1\}$.

On a alors : $(A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2) = \{(0, 0)\} \cup \{(1, 1)\}$

et $(A_1 \cup A_2) \times (B_1 \cup B_2) = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
 $= \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.

Ainsi, $(0, 1)$ est dans le premier ensemble et non dans le second.

On conclut qu'en général il n'y a pas égalité entre les deux ensembles envisagés.

1.8

1) \implies 3) :

Supposons $A \setminus B \subset C$. Soit $x \in A$.

Si $x \in B$, alors $x \in B \cup C$.

Si $x \notin B$, alors $x \in A \setminus B$, donc $x \in C$, puis $x \in B \cup C$.

Ceci montre : $x \in B \cup C$.

On a donc : $A \subset B \cup C$.

3) \implies 1) :

Supposons $A \subset B \cup C$.

Soit $x \in A \setminus B$, donc $x \in A$ et $x \notin B$.

Comme $x \in A$ et $A \subset B \cup C$, on a $x \in B \cup C$.

Puisque $x \in B \cup C$ et $x \notin B$, on déduit $x \in C$.

Cela montre : $A \setminus B \subset C$.

On a donc établi l'équivalence logique : 1) \iff 3).

Comme $B \cup C = C \cup B$, on déduit, en remplaçant (B, C) par (C, B) dans le résultat précédent : 2) \iff 3).

Finalement, les trois assertions 1), 2), 3) sont deux à deux équivalentes.

1.9

a) 1) *Réflexivité* :

On a, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, $x \mathcal{R} x$, car $x = x^1$.

2) *Antisymétrie* :

Soient $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x$.

Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $x = y^p$.

On a $x \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, donc $x \geq 1$ et $n \geq 0$, d'où $x^n \geq x$, donc $y = x^n \geq x$.

De même, $x \geq y$, et on déduit $x = y$.

3) *Transitivité* :

Soient $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$.

Il existe $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $y = x^n$ et $z = y^p$.

On a alors : $z = y^p = (x^n)^p = x^{np}$ et $np \in \mathbb{N}^*$, donc $x \mathcal{R} z$.

On conclut : \mathcal{R} est un ordre sur \mathbb{N}^* .

b) On n'a ni $1 \mathcal{R} 2$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2 = 1^n$, ni $2 \mathcal{R} 1$, car il n'existe pas $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1 = 2^n$.

On conclut : \mathcal{R} n'est pas total.

1.10

Puisque u_{n+2} est donné en fonction de u_{n+1} et de u_n , on va effectuer une récurrence à deux pas.

• *Initialisation* :

Pour $n = 0$, on a $u_1 > u_0$, car $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

Pour $n = 1$, on a $u_2 > u_1$,

car $u_1 = 1$ et $u_2 = \frac{u_1 + u_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

• *Hérédité* :

Supposons que, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $u_{n+1} > u_n$ et $u_{n+2} > u_{n+1}$. On a alors :

$$u_{n+3} = \frac{u_{n+2} + u_{n+1}}{2} + 1 > \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + 1 = u_{n+2}.$$

Ceci montre, par récurrence à deux pas sur n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n.$$

On conclut que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

1.11

Puisque u_{n+1} est donné (entre autres) en fonction de u_0, \dots, u_n , on va effectuer un raisonnement par récurrence forte.

• *Initialisation* :

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \in \mathbb{Q}_+^*$.

• *Hérédité* :

Supposons, pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé : $u_0, \dots, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

Comme $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{k!(n-k)!}$, que u_0, \dots, u_n sont dans \mathbb{Q}_+^*

et que $0!, 1!, \dots, n!$ sont dans \mathbb{N}^* , par opérations, on déduit : $u_{n+1} \in \mathbb{Q}_+^*$.

On conclut, par récurrence forte sur n : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{Q}_+^*$.

1.12

a) • Il est clair que, si $A = B$, alors $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Réciproquement, supposons $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Pour tout $a \in A$, on a $\mathbf{1}_B(a) = \mathbf{1}_A(a) = 1$, donc $a \in B$, ce qui montre $A \subset B$, puis, de même, $B \subset A$, donc $A = B$.

On conclut : $A = B \iff \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

Autrement dit, la connaissance de $\mathbf{1}_A$ détermine entièrement A .

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A$, alors $x \notin \bar{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 1$ et $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 0$, d'où $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$

si $x \notin A$, alors $x \in \bar{A}$, donc $\mathbf{1}_A(x) = 0$ et $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \mathbf{1}_{\bar{A}}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$.

• On a, pour tout $x \in E$:

si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$, $\mathbf{1}_A(x) = 1$, $\mathbf{1}_B(x) = 1$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$

si $x \notin A \cap B$, alors $x \notin A$ ou $x \notin B$, donc $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$ et $(\mathbf{1}_A(x) = 0 \text{ ou } \mathbf{1}_B(x) = 0)$, d'où $\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

Ceci montre : $\forall x \in E, \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$.

On conclut : $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$.

• On a, en passant par des complémentaires et en utilisant des résultats précédents :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cup B} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cup B}} \\ &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A} \cap \overline{B}} \\ &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}}\mathbf{1}_{\overline{B}} \\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B. \end{aligned}$$

• On a :

$$\mathbf{1}_{A \setminus B} = \mathbf{1}_{A \cap \overline{B}} = \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{\overline{B}} = \mathbf{1}_A(1 - \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B.$$

b) On a, pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cap (A \cup B)} &= \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A, \end{aligned}$$

donc, d'après a) : $A \cap (A \cup B) = A$.

De même :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cup (A \cap B)} &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_{A \cap B} - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_{A \cap B} \\ &= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A(\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A, \end{aligned}$$

donc, d'après a) : $A \cup (A \cap B) = A$.

On peut aussi remarquer que, puisque $A \subset A \cup B$, on a $A \cap (A \cup B) = A$, et que, puisque $A \cap B \subset A$, on a $A \cup (A \cap B) = A$.

1.13

a) 1) *Réflexivité* :

Soit $u \in E$. On a $u - u = 0$ croissante, donc $u \mathcal{R} u$.

2) *Antisymétrie* :

Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $u \mathcal{R} v$ et $v \mathcal{R} u$.

Alors, $v - u$ est croissante et $u - v$ est croissante, donc $v - u$ est constante, et puisque $u_0 = 0 = v_0$, on déduit $v - u = 0$, $u = v$.

3) *Transitivité* :

Soit $(u, v, w) \in E^3$ tel que $u \mathcal{R} v$ et $v \mathcal{R} w$.

Alors, $v - u$ est croissante et $w - v$ est croissante, donc, par addition, $w - u = (w - v) + (v - u)$ est croissante, donc $u \mathcal{R} w$.

On conclut que \mathcal{R} est une relation d'ordre sur E .

b) Pour montrer que l'ordre \mathcal{R} n'est pas total, il suffit de trouver $u, v \in E$ telles que $v - u$ et $u - v$ ne soient pas croissantes, c'est-à-dire telles que $v - u$ ne soit pas monotone.

Il est clair que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 0$ et $v_n = 1 - (-1)^n$ conviennent.

On conclut que l'ordre \mathcal{R} n'est pas total.

c) Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $u \mathcal{R} v$.

Alors, $v - u$ est croissante et $v_0 - u_0 = 0 - 0 = 0$, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geq 0$, c'est-à-dire $u \leq v$.

d) Donnons un contreexemple, dans lequel $u \leq v$ et non $u \mathcal{R} v$. Il suffit de trouver $u, v \in E$ telles que $v - u \geq 0$ et que $v - u$ ne soit pas croissante.

L'exemple donné dans la solution de la question b), $u_n = 0$, $v_n = 1 - (-1)^n$, convient.

1.14

a) Supposons $g \circ f$ injective.

Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $f(x_1) = f(x_2)$. On a alors :

$$g \circ f(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = g \circ f(x_2).$$

Puisque $g \circ f$ est injective, il s'ensuit : $x_1 = x_2$.

On conclut que f est injective.

b) Supposons $g \circ f$ surjective.

Soit $z \in G$. Puisque $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que : $z = g \circ f(x)$.

On a alors : $z = g(f(x))$ et $f(x) \in F$.

Ceci montre : $\forall z \in G, \exists y \in F, z = g(y)$.

On conclut que g est surjective.

c) Si $g \circ f$ est bijective, alors $g \circ f$ est injective et surjective, donc, d'après a) et b), f est injective et g est surjective.

1.15

a) On suppose $f \circ g \circ f = f$ et f injective.

Soit $x \in E$.

On a : $f(x) = (f \circ g \circ f)(x) = f(g \circ f(x))$.

Comme f est injective, on déduit :

$$x = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Cela montre que g est surjective.

b) On suppose $g \circ f \circ g = g$ et g surjective.

Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

Puisque g est surjective, il existe $y_1, y_2 \in F$ tels que :

$$x_1 = g(y_1) \text{ et } x_2 = g(y_2).$$

On a alors :

$$\begin{aligned} x_1 = g(y_1) &= (g \circ f \circ g)(y_1) = g(f(g(y_1))) = g(f(x_1)) \\ &= g(f(x_2)) = (g \circ f \circ g)(y_2) = g(y_2) = x_2, \end{aligned}$$

et on conclut que f est injective.

1.16

a) Supposons $A \subset B$.

Soit $y \in f(A)$. Il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$.

Comme $a \in A \subset B$, on a $a \in B$, puis $y = f(a) \in f(B)$.

On obtient : $f(A) \subset f(B)$.

b) Soit $a \in A$. On a : $f(a) \in f(A)$, donc par définition d'une image réciproque, $a \in f^{-1}(f(A))$.

On conclut : $A \subset f^{-1}(f(A))$.