AVANT-PROPOS

Bravo, vous êtes en deuxième année. Pas facile, vous pouvez déjà être fier de vous d'avoir su surmonter la première année alors qu'il vous manquait en Terminale une des trois spécialités scientifiques ! On espère que vous avez acquis des bonnes méthodes de travail car la deuxième année est une année courte et intense et, avant qu'on ait le temps de dire ouf, le concours est déjà là. Autant dire qu'il va falloir être redoutablement efficace ! Le livre que vous avez la chance de tenir dans vos mains a pour principal objectif de vous y aider en mathématiques en vous apportant, non pas un nouveau cours, mais son mode d'emploi, une sorte de dictionnaire (cf. cours d'informatique, :)) pour vous aider à traduire ce que votre gentil et beau prof de maths (surtout si vous êtes à Nîmes) vous dit !

En 14 chapitres et 190 méthodes (à peu près !), nous couvrirons l'ensemble du programme de deuxième année de BCPST. Dans chaque chapitre, vous trouverez :

- **Des méthodes hiérarchisées et claires** afin de répondre aux questions les plus fréquentes sur le sujet abordé. Un grand nombre d'exemples émaillent ces méthodes afin que vous sachiez à quoi elles servent et comment les utiliser.
- **Des bonus :** les trucs et astuces incontournables (à avoir en tête avant d'aborder un exercice), les erreurs classiques à éviter (un BCPST2 averti en vaut 10) et les tuyaux des correcteurs de concours (cela peut servir !).
- **Des exercices judicieusement choisis et méthodiquement corrigés :** pas la peine de faire 500 exos, un BCPST n'a pas ce temps à consacrer aux maths. Une dizaine d'exos bien choisis par chapitre (souvent issus des écrits ou des oraux de vos concours) suffit largement !

Ces chapitres seront précédés par un chapitre pour réviser efficacement la BCPST1. Sans une bonne BCPST1, on ne peut pas réussir sa BCPST2 ! Et vu le poids du programme de BCPST1 à l'écrit comme à l'oral, c'est l'un des chapitres les plus importants de ce livre !

Il me reste à effectuer quelques remerciements : Mes élèves (en particulier leurs questions pertinentes), mes collègues (en particulier mon référent scientifique, J.-C. Léger), Corinne Baud (éditrice chez Ellipses), Xavier Merlin (pour avoir eu l'idée d'écrire les mythiques Méthodix qui ont clarifié ma vision des mathématiques). Je remercie aussi ma petite famille, les adorables Capucine, Mado et Isaure qui m'ont laissé travailler tranquillement (mais ce serait bien de ranger vos chambres quand même). Je termine en remerciant tout spécialement ma femme, l'incroyable Lucile du 58, pour son soutien constant et ses gravures merveilleuses ! Pas de livre sans amour !

Chapitre 1

Méthodes pour bien démarrer

On ose... Commençons ce livre de deuxième année avec des révisions de première année !

- **Pourquoi ?**
  Tout simplement parce que $62,3\%$ en moyenne des sujets d'écrit sont constitués de questions relevant uniquement de la première année. Signalons aussi qu'un certains nombre de chapitres de BCPST1 ne sont pas approfondis en deuxième année et sont donc peu évoqués par votre professeur de deuxième année. Du coup, vous avez tendance à ne pas assez les réviser assez ! Les équations différentielles linéaires, par exemple, tombent régulièrement et ne sont qu'au programme de la première année.
- **Comment ?**
  À chaque chapitre de première année non abordé en deuxième année, on rappelle rapidement ce que vous devez savoir faire. On vous donne après un exercice corrigé sur lequel vous pouvez vous tester. À la fin, on a pris des exos de ces différents chapitres. Si vous ressentez des difficultés à les faire, alors sans aucune hésitation, **vous devez absolument vous replonger dans votre cours de première année.**

1.1 Révisons efficacement trigo et complexes

MÉTHODE 1 : Résoudre des équations trigo

■ **Principe :**
Résoudre des équations trigo ne devrait pas vous poser trop de problèmes, l'idée est de se ramener à une égalité entre deux cos ou deux sin ou deux tan puis à invoquer ces propriétés du cours :

1. $\cos(\theta) = \cos(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\phi[2\pi]$
2. $\sin(\theta) = \sin(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv \pi - \phi[2\pi]$
3. $\tan(\theta) = \tan(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv \phi + \pi[2\pi]$ que l'on résume en $\tan(\theta) = \tan(\phi) \Leftrightarrow \theta \equiv \phi[\pi]$

Si jamais vous avez un mélange de cos et du sin, sachez que vous pouvez passer de l'un à l'autre en faisant un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ car :

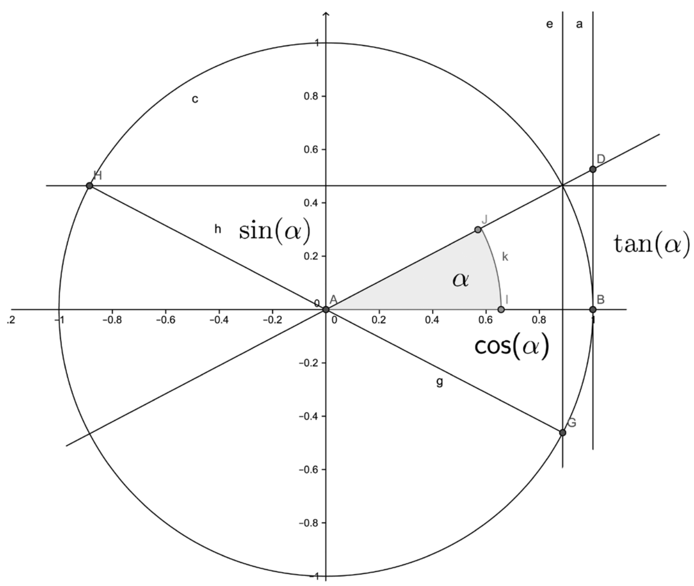
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta).$$

■ **Rappel :**
Lors de la résolution d'équations de trigonométrie, on va devoir faire des sommes et des divisions dans les modulos, voici les règles qu'il faudra respecter :

- $\theta_1 \equiv \theta_1'[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta_2'[2\pi] \Rightarrow \theta_1+\theta_2 \equiv \theta_1'+\theta_2'[2\pi]$
- $\theta_1 \equiv \theta_1'[2\pi]$ et $\theta_2 \equiv \theta_2'[2\pi] \Rightarrow \theta_1-\theta_2 \equiv \theta_1'-\theta_2'[2\pi]$
- $n\theta_1 \equiv n\theta_1'[2\pi] \Leftrightarrow \theta_1 \equiv \theta_1'\left[\frac{2\pi}{n}\right]$

Penser bien en particulier à diviser dans le modulo quand vous diviser une égalité.

■ **Mise en garde :**
Attention, on des modulos 2π pour cos et sin et modulo π pour tan. Ne pas oublier aussi à chaque fois la deuxième possibilité. $\cos(\theta)=\cos(\phi)$ n'équivaut pas à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ mais à $\theta \equiv \phi[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\phi[2\pi]$. La deuxième possibilité se retrouve très simplement en observant un cercle trigo :



1. Pour le cos, on remarque que $\cos(\alpha)$ et $\cos(-\alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite verticale sur le cercle pour le voir.
2. Pour le sin, on remarque que $\sin(\alpha)$ et $\sin(\pi-\alpha)$ valent la même chose. On a tracé une droite horizontale sur le cercle pour le voir.
3. Pour le tan, on remarque que $\tan(\alpha)$ et $\tan(\pi+\alpha)$ valent la même chose.

■ ***Exemple:***

> *Résoudre l'équation* $\cos(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right)$ *d'inconnue* x *réel.*
>
> Soit x un réel, on a $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ d'où :
>
> $$\begin{aligned} \cos(x) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right) &\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{2x}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{2} & \equiv & \frac{2x}{3}[2\pi] \\ \text{ou} & & \\ x + \frac{\pi}{2} & \equiv & \pi - \frac{2x}{3}[2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{3} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \ \text{ ou } \ \frac{5x}{3} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv -\frac{3\pi}{2}[6\pi] \ \text{ ou } \ x \equiv \frac{3\pi}{10}\left[\frac{6\pi}{5}\right] \end{aligned}$$

MÉTHODE 2 : Savoir couper les angles en deux

■ **Rappel :**
On sait que $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ et :

$$\begin{aligned} \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ &= 2\cos^2(\theta) - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2(\theta). \end{aligned}$$

D'autre part, en posant $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, on obtient (sous réserve d'existence) celles liées à la tangente de l'angle moitié :

- $\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $\tan(\theta) = \frac{2t}{1-t^2}$

■ **Principe :**
Parmi toutes les belles formules de trigo, celles faisant permettant de passer de 2θ à θ (cf; rappel ci-dessus) sont très usitées. Vous devez non seulement les connaître mais aussi les reconnaître. Dès que vous avez des formules de trigo mélangeant des 2θ, des θ et compagnie, essayez d'homogénéiser au maximum en utilisant ces formules qui vous permettent de diviser ou multiplier les angles par deux.

■ ***Exemple:***

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réel :

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(2x) + 1.$$

Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned}\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(2x) + 1 &\iff 1 - 2\sin^2(x) = 2\sin(x)\cos(x) + 1\\ &\iff \sin(x) \times (\cos(x) + \sin(x)) = 0\\ &\iff \sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\sin(x)\\ &\iff x \equiv 0[\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]\end{aligned}$$

MÉTHODE 3 : Maîtriser la technique de l'angle moitié

■ **Rappel :**
On va avoir besoin des formules d'Euler pour cette méthode :

$$\exp(i\theta) + \exp(-i\theta) = 2\cos(\theta) \text{ et } \exp(i\theta) - \exp(-i\theta) = 2i\sin(\theta).$$

■ **Principe :**
On souhaite mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme suivante :

$$\exp(ia) + \exp(ib) \text{ ou } \exp(ia) - \exp(ib).$$

Pour cela, il suffit de mettre en facteur l'angle moitié, c'est-à-dire $\exp\left(i\frac{a+b}{2}\right)$, puis d'utiliser les formules d'Euler données dans le rappel. On obtient alors ces deux formules (qu'il ne faut pas apprendre par cœur mais savoir retrouver en factorisant comme on vient juste de le dire !) :

- $\exp(ia) + \exp(ib) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\frac{a+b}{2}\right)$.
- $\exp(ia) - \exp(ib) = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\exp\left(i\frac{a+b}{2}\right)$.

■ **Cas particulier :**
On rencontre aussi de temps en temps des $\exp(ia) + 1$ et $\exp(ia) - 1$, c'est donc le cas particulier où l'un des deux angles est nul. Il suffit alors de factoriser par $\exp\left(i\frac{a}{2}\right)$ afin d'obtenir :

$$\exp(ia) + 1 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right) \quad \text{et} \quad \exp(ia) - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)\exp\left(i\frac{a}{2}\right).$$

■ ***Exemple:***

Soit a *un élément de* $]0, \pi]$. *Mettre sous forme trigonométrique le complexe suivant :*

$$z = \frac{\exp(ia) + 1}{1 - \exp(ia)}.$$

On note que $1 - \exp(ia)$ n'est pas nul puisque a n'est pas un multiple de 2π. On met $\exp\left(i\frac{a}{2}\right)$ en facteur au numérateur comme au dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right) + \exp\left(-i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(-i\frac{a}{2}\right) - \exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \times \frac{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)}{\exp\left(i\frac{a}{2}\right)} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \\ &= i\frac{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On a remplacé $\frac{1}{i}$ par $-i$ ce qui est vrai puisque $i^2 = -1$.

MÉTHODE 4 : Savoir factoriser

■ **Rappel :**

On va utiliser les égalités vues dans la précédente méthode :

- $\exp(ip) + \exp(iq) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\exp\left(i\frac{p+q}{2}\right)$.
- $\exp(ip) - \exp(iq) = 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\exp\left(i\frac{p+q}{2}\right)$.

En identifiant parties réelles et imaginaires, on obtient les formules de factorisation (qui ne sont pas à connaître par cœur mais à savoir retrouver rapidement à l'aide de la formule précédente) :

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

■ **Cas d'utilisation :**

Factoriser est utile quand on résout une équation ou quand on cherche un signe. Autant dire que dans ces deux cas, on n'apprécie guère d'avoir une somme ! Bref, ces formules de factorisation, bien qu'elles ne soient pas à apprendre par cœur, sont à savoir retrouver très très rapidement !

■ ***Exemple:***

Résoudre l'équation $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ *d'inconnue* x *réel.*

Soit x un réel. À l'aide des formules de factorisations, on obtient :

$$\sin(x) + \sin(3x) = 2\cos\left(\frac{3x - x}{2}\right)\sin\left(\frac{x + 3x}{2}\right)$$

Chouette, du $\sin(2x)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x) = 0 &\iff 2\sin(2x)\cos(x) + \sin(2x) = 0 \\
&\iff \sin(2x) \times \left(\cos(x) + \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff \sin(2x) = 0 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2} \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & \equiv & 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \\ \text{ou} & & \\ x & \equiv & \pm\frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \end{array}\right.
\end{aligned}$$

MÉTHODE 5 : Savoir linéariser

■ **Principe :**
Le but est d'exprimer des puissances de cos et de sin en fonction de somme de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$. Il suffit pour cela de suivre ces deux étapes :

- **Étape 1 :**
  On remplace toutes les fonctions trigos grâce aux formules d'Euler puis on développe avec la formule du binôme de Newton.
- **Étape 2 :**
  Dans la grosse somme obtenue, on regroupe ensemble les $\exp(ik\theta)$ avec leurs amis, les $\exp(-ik\theta)$, et, enfin, on utilise de nouveau les formules d'Euler pour repasser en cos et sin.

Les calculs sont souvent pénibles mais en étant bien organisé, cela ne pose pas trop de souci !

■ **Cas d'utilisation :**
Linéariser, c'est bien utile quand on a besoin d'une somme. Typiquement, quand on cherche à calculer une intégrale faisant intervenir une puissance de cos ou de sin !