Mathématiques en physique

Mathématiques en physique

Concepts et outils

Cours et applications

Jean-Pierre Provost
Ancien professeur à l'université de Nice-Sophia Antipolis.

Bernard Raffaelli
Enseignant chercheur à l'ESME Sudria Lyon.

Gérard Vallée
Ancien maître de conférences à l'université de Nice-Sophia Antipolis.

DUNOD

Illustration de couverture : tony max – istock.com

11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff

www.dunod.com

ISBN 978-2-10-079023-4

Table des matières

Liste des abréviations

A.R.Q.S. approximation des régimes quasi-stationnaires.

c.d.m. centre de masse.

C.I. condition initiale.

C.L. condition aux limites.

E.D. équation différentielle.

- E.D.L. équation différentielle linéaire.

- E.D.L.S. équation différentielle linéaire stationnaire.

E.D.P. équation aux dérivées partielles.

E.V. espace vectoriel.

L.C. loi de conservation.

S.D. système dynamique.

- S.D.L. système dynamique linéaire.

- S.D.L.S. système dynamique linéaire stationnaire.

T.F. transformée de Fourier.

T.L. transformation de Lorentz.

- T.L.P. transformation de Lorentz pure.

v.a. variable aléatoire.

Table des sujets de physique

4. Thermodynamique et physique statistique

5. Electricité et électromagnétisme

6. Relativité

7. Optique

8. Ondes

9. Physique quantique

Avant-propos

Cet avant-propos est destiné à expliciter l'esprit qui a prévalu à la rédaction de cet ouvrage et à permettre au lecteur d'en tirer le meilleur profit.

Esprit et originalité de l'ouvrage

Cet ouvrage reprend les principaux **concepts et techniques mathématiques intervenant dans la physique enseignée à l'université du L1 aux masters** et les illustre par de nombreux exemples.

Il a eu son origine dans l'élaboration de documents de travail pour "agrégatifs" de physique constitués de questions-exercices de mathématiques ayant un rapport direct avec le programme du concours. Sous sa forme actuelle il s'adresse en priorité aux étudiants de L3 et de masters de physique mais de nombreux sujets concernent les programmes de L1 et de L2, de classes préparatoires et d'écoles d'ingénieurs.

Son objectif est de mettre en avant l'intérêt des mathématiques pour la physique en montrant comment un même concept ou résultat mathématique intervient dans des domaines de physique parfois très éloignés les uns des autres, ce qui souligne **l'essence mathématique de beaucoup d'idées physiques**. A ce titre il peut s'adresser à un large public d'enseignants et de chercheurs intéressés par les liens profonds qui historiquement ont toujours existé entre ces deux disciplines.

Il ne s'agit donc ni d'un livre de "méthodes mathématiques pour la physique", avec définitions, lemmes et théorèmes, offrant un cadre rigoureux à un nombre limité d'applications, ni d'un livre d'entraînement à la résolution de problèmes réduisant les mathématiques au rôle d'outils de calcul.

Quelques exemples d'intrication maths-physique

Des savoir-faire "typiques" de physicien, comme par exemple
1) l'établissement du signe correct dans une relation en raisonnant sur un cas particulier,
2) l'utilisation d'**arguments dimensionnels** pour rétablir des paramètres posés égaux à 1 lors du calcul d'une expression,
3) l'emploi d'**arguments de symétrie** pour déterminer la direction d'un champ vectoriel en un point,
reposent tous sur la **propriété d'invariance des lois physiques** par rapport à un groupe de transformations et sont donc d'essence mathématique.

S'il veut transmettre ce savoir le physicien se doit d'expliciter cette notion d'invariance, ce qui implique de préciser les transformations considérées et la manière dont elles agissent sur les grandeurs physiques. **Ces informations** sont non seulement fondamentales mais aussi très pratiques et **concernent tout étudiant de physique quel que soit son niveau**.

Dans le premier cas ce sont le caractère algébrique des grandeurs physiques et l'invariance des lois par rapport aux changements de conventions de signe qui sont en jeu. L'exemple, donné au chapitre 1, d'un système électromécanique simple, avec 64 combinaisons de signe possibles, montre la relativité des conventions et la possibilité d'en choisir une sans perte de généralité (de même qu'on traite un problème dans un référentiel).

Dans le second cas c'est l'invariance des lois par rapport aux changements d'unités qui est concernée. Cette propriété permet d'adimensionner des équations (ce qui simplifie beaucoup de calculs) et de faire des prédictions dimensionnelles (par exemple estimer des ordres de grandeurs).

Quant aux arguments de symétrie, on montre par exemple au chapitre 3 que, conjuguée à la linéarité, l'invariance par rapport aux transformations les plus simples (les translations) conduit à la fois aux lois de Descartes (translations "continues"), aux formules des réseaux optiques et de Bragg pour les cristaux (translations "discrètes") et aussi à la loi de conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie (translations spatiales et temporelles) en physique quantique.

Beaucoup d'autres exemples pourraient être donnés. Ainsi au chapitre 5 on verra que ce qui se cache derrière une analyse de Fourier des fonctions est la notion physique de filtrage, derrière une analyse de Dirac celle de réponse impulsionnelle et derrière une analyse "probabiliste" celle de corrélation.

Organisation de l'ouvrage

L'ouvrage contient **12 chapitres regroupant plus de 140 sous-sections** traitant d'un thème précis, à dominante mathématique ou physique et illustrées par **plus de 300 figures**. La rédaction a été conçue de sorte à rendre chaque sous-section la plus autonome possible afin qu'un lecteur disposant d'un minimum de connaissances puisse s'y reporter directement (moyennant éventuellement des renvois, signalés dans le texte, à d'autres sous-sections).

Les premiers chapitres sont consacrés à **dix grands domaines des mathématiques** (nombres réels, complexes, espace et symétries, calcul linéaire, fonctions d'une variable, de plusieurs variables, équations différentielles, aux dérivées partielles, probabilités, principes variationnels) ainsi qu'aux applications physiques correspondantes.
Le onzième chapitre concerne plus précisément les mathématiques de la **physique quantique** et le douzième une introduction à l'**analyse numérique** utilisée en physique.

Chaque chapitre commence par une brève introduction du sujet (souvent historique) permettant de motiver son étude. Les aspects les plus mathématiques (définitions, principaux résultats...) sont ensuite présentés dans les premières sections. Ces résultats font en général l'objet d'une démonstration rapide, certains calculs étant laissés au lecteur ; sinon l'idée de la démonstration est donnée. Ils ne sont donc jamais "parachutés" et leur appropriation par le lecteur est facilitée par la présence de nombreux exemples et éventuellement contre-exemples.

Les dernières sections d'un chapitre sont généralement consacrées à des domaines particuliers de physique utilisant les techniques et concepts introduits auparavant. C'est le cas par exemple de l'optique de Fourier (en liaison avec la transformation de Fourier), de l'hydrodynamique et la formulation intégrale de l'électromagnétisme (en liaison avec l'analyse vectorielle), de la physique statistique (en liaison avec les probabilités), de l'étude des déformations (en liaison avec le calcul matriciel)...

A la table des matières usuelle a été ajoutée une "**table des sujets de physique**" destinée aux lecteurs qui souhaitent retrouver un sujet de physique connu dans le "découpage classique" par spécialités : Généralités, Mécanique classique, Hydrodynamique et milieux continus, Thermodynamique et physique statistique, Electricité et électromagnétisme, Relativité, Optique, Ondes, Physique quantique.

Différents niveaux de lecture ; exemples

Les chapitres ne sont pas conçus pour être lus de façon linéaire de la première à la dernière page. Bien que ce livre s'adresse principalement à des étudiants de niveau L3 de nombreuses parties introductives peuvent être profitables à ceux de L1 et L2 ainsi qu'aux élèves de classes préparatoires. Inversement d'autres parties d'un même chapitre sont traditionnellement enseignées en Master.

Par exemple au chapitre 1 à propos de l'analyse dimensionnelle dont les bases sont exposées à la section 1.3.1 on ne devra pas être étonné de voir des applications classiques (niveau L1, L2) être suivies de compléments sur les ensembles fractaux, l'analyse d'échelle et la renormalisation. Chacun adaptera sa lecture en fonction de ses propres connaissances et de sa curiosité.

Au chapitre 5 "fonctions d'une variable ; analyse des signaux" tout ce qui concerne la première section, à savoir l'information contenue dans un graphe, les dérivées et développements limités, l'intégration et le lien entre la concavité de l'entropie et la thermodynamique relève des premières années de licence ; même l'intégration par la méthode du col ou celle de la phase stationnaire, rarement introduites à ce niveau, peuvent être lues compte tenu des exemples physiques choisis. Le contenu des deuxième section "opérations sur les fonctions et analyse de Dirac" et troisième section "transformée et analyse de Fourier" est en général enseigné en troisième année ; cependant certaines parties comme la transformée de Laplace sont abordables par un étudiant de deuxième année tandis que d'autres comme l'application du filtrage d'un bruit blanc à l'équation de Langevin et aux télécommunications sont d'un niveau master. De même dans la dernière section "optique de Fourier ; filtrage optique", du niveau master, certaines parties peuvent intéresser un étudiant de deuxième année.

Enfin pour ne pas interrompre la lecture des parties essentielles, de nombreux passages sont écrits en **petits caractères**. Dans l'esprit des auteurs ces passages sont considérés, indépendamment de leurs niveau, comme réservés à une **seconde lecture**. C'est le cas en particulier pour certaines démonstrations de théorèmes ou pour des remarques et des compléments.

Parties originales de l'ouvrage

En plus du caractère nouveau de son approche ce livre contient certaines présentations, discussions et démonstations originales (ou partiellement originales) comme :

- les introductions des dimensions (section 1.3.1), des groupes de symétrie (section 3.1.1), des bilans de grandeurs et ondes de choc (section 7.2.4), de la masse d'inertie (section 10.2.1), de la constante cosmologique (section 11.3.2)...

- les discussions de la concavité de l'entropie dans des cas simples (section 5.1.4) et pour le gaz de Van der Waals (section 7.4.1), du principe d'Huygens-Fresnel en liaison avec la notion de filtrage (section 5.4.1), des volumes en grande dimension (section 7.2.1), de l'identité des vitesses de groupe et de l'énergie (section 8.2.1), de la formulation intégrale de l'électromagnétisme (section 7.5.1)...

- les démonstrations des lois de Descartes et de ses généralisations (section 3.4.2), de l'invariance relativiste de l'électromagnétisme (section 4.3.4), de la règle d'or de Fermi et de la loi exponentielle de désexcitation en quantique (section 11.1.3), des théorèmes adiabatique classique (section 6.4.4) et quantique (section 11.1.2)...

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier leurs collègues Y. Gabellini, O. Legrand, F. Peters, L. Petit, J.A. Sepulchre et D. Wilkowski pour la relecture de certains chapitres et leurs suggestions pertinentes, ainsi que G. Gonczi pour son aide à la réalisation de certaines figures, en particulier le tracé de la surface $S(U, V)$ pour un fluide de Van der Waals. Ils sont également conscients que la rédaction de certaines parties de cet ouvrage a bénéficié indirectement de conversations avec de nombreux autres collègues notamment P. Coullet, J.L. Féménias, J.M. Levy Leblond, J.L. Meunier, ainsi que de l'expérience tirée de nombreux enseignements effectués en licence et maîtrise de physique, licence E.E.A, écoles d'ingénieurs post-bac et préparation à l'agrégation de physique.

Concernant le chapitre 12 “Analyse numérique ; Physique discrète” nous tenons à remercier B. Cessac, T. Corbard, J.L. Féménias, O. Legrand et J. Provost qui nous ont aidé dans le choix des sujets retenus.

Nice et Lyon Octobre 2018

Chapitre 1

Nombres réels ; grandeurs physiques ; dimensions

Le but de ce chapitre n'est pas de rappeler au lecteur des techniques de calcul qu'il connait, mais d'insister sur des notions non triviales que recouvre l'emploi des réels en physique. Parmi elles figurent la continuité, le caractère algébrique de la plupart des grandeurs physiques, et la notion de dimension qui traduit l'invariance des lois physiques pour certains changements d'unités, avec ses limites (fractals, renormalisation).

1.1 GRANDEURS PHYSIQUES ; CONTINUITÉ ; PARAMÉTRAGES ADDITIFS

Les nombres servent à comparer entre elles, notamment avec celle qui sert d'unité, des grandeurs de même nature et à transcrire la loi de composition de ces grandeurs. L'exemple qui a servi de prototype depuis la théorie des grandeurs d'Euclide ($\simeq$ 400 av. J.-C.) jusqu'à la construction récente des nombres réels (Cantor, Dedekind $\simeq$1870) est la description des longueurs sur une “droite”. Aujourd'hui encore, même si la plupart des appareils de mesure avec une aiguille se déplaçant devant un cadran sont remplacés par des appareils à affichage numérique, l'identification (“isomorphisme local”) grandeur physique-longueur sur une droite reste valable.

1.1.1 Survol « physique » des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

▷ Composition de grandeurs additives ; permutations ; comptages

L'introduction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des **nombres entiers** 0,1,2... n'est évidemment pas qu'une question de numérotation. L'important est qu'ils sont générés par une opération récurrente : le passage de n à $n+1$. C'est cette opération fondamentale “addition d'une unité” que l'on reconnaît dans de très nombreuses situations expérimentales : mise bout à bout de segments identiques sur une droite, répétition d'une rotation autour d'un axe, accrochages successifs de masses pesantes identiques à un ressort, mise en série de forces électromotrices identiques, *etc.* Ces opérations physiques possèdent les propriétés de commutativité et d' associativité qu'on transcrit par l'addition au niveau des nombres. L'entier $q = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1$ représente alors la grandeur obtenue en composant q fois avec elle-même la grandeur unité, et le nombre 0 l'opération "neutre", qui consiste par exemple à ne rien accrocher au ressort. Enfin si on compose la grandeur associée à q avec elle même, on obtient les grandeurs associées à $2q,\ 3q\ldots$ L'opération de multiplication ainsi introduite est, on le sait, commutative, associative et distributive par rapport à l'addition.

Le nombre **factorielle** n, $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ ($0! \stackrel{\text{def}}{=} 1$), ainsi que les factorielles multiples $\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_q!}$ (où $n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n$), par exemple les **combinaisons**

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^{n-p} \ ,$$

interviennent dans de nombreux comptages. Ainsi $n!$ est le nombre de façons d'associer en série n générateurs différents, ou d'ordonner n objets différents $A, B, C, \ldots.$, ou encore de les numéroter en les écrivant $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$, les nombres $i_1, i_2, \ldots, i_n$ étant tous différents et pris entre 1 et n. Les opérations qui font passer de $1, 2, \ldots, n$ à $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sont appelées **permutations** et sont au nombre de $n!$ car i_1 peut être choisi de n façons, i_2 de $n-1$ façons, i_3 de $n-2$ façons, ..., et i_n d'une façon. Si les n objets sont choisis parmi q catégories, ceux d'une même catégorie étant considérés comme identiques (générateurs de même tension par exemple), il n'y a pas lieu de distinguer les façons d'ordonner les objets à l'intérieur d'une même catégorie. Le comptage s'obtient alors en divisant $n!$ par le produit des nombres de permutations "inopérantes" $n_1!n_2!\cdots n_q!$, où n_p ($p = 1, 2, \ldots, q$) est le nombre d'objets pris dans la catégorie p. Une application est la **formule du binôme** $(a+b)^n = \Sigma_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$ valable dès lors que les opérations + et $\times$ sur les "objets" a et b sont commutatives et distributives. On retiendra : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + nab^{n-1} + b^n \ .$$

▷ Changements d'unité ; nombres algébriques ; commensurabilité

Au lieu de considérer la grandeur associée à q comme composée de q fois l'identité, on peut adopter un autre point de vue qui est l'analogue du point de vue passif lors d'un changement de référentiel (*cf.* section 3.1.1). Il consiste à considérer que le regroupement q par q de la grandeur unité définit une nouvelle unité q fois plus grande. Alors des grandeurs correspondant aux nombres $x' = 0, 1, 2, 3\ldots$ lorsqu'elles sont obtenues par composition de cette nouvelle unité correspondent comme on l'a vu aux nombres $x = 0, q, 2q, 3q\ldots$ pour l'ancienne unité. Inversement pour représenter numériquement avec la nouvelle unité des grandeurs correspondant à $x = 0, 1, 2\ldots p\ldots$ on est amené à introduire les nombres fractionnaires, $x' = \dfrac{p}{q}$ signifiant $x = p$.

Pour de nombreuses grandeurs physiques il existe une **opération inverse** de l'addition, comme par exemple lors de la mise bout à bout de segments orientés. On est alors amené à introduire l'ensemble des **entiers algébriques** $\mathbb{Z} = (\cdots - 2, -1, 0, 1, 2\ldots)$, l'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q} = \left\{\dfrac{p}{q}\ ;\ p \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \in \mathbb{Z}\right\}$, et les règles du calcul algébrique (les fameuses "règles des signes") afin d'étendre à $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ les propriétés de l'addition et de la multiplication sur $\mathbb{N}$. Compte tenu de son importance deux sections (1.2.1,2) sont consacrées au **caractère algébrique des grandeurs physiques**.

Enfin, une question a de longue date préoccupé les scientifiques : peut-on toujours comparer deux grandeurs (de même nature) à l'aide de $\mathbb{Q}$? Si oui elles sont commensurables et il existe une unité telle que la première vaut $p \in \mathbb{Z}$ et la seconde $q \in \mathbb{Z}$. Mais la réponse à cette question est non, et était déjà connue des Grecs (relations $\frac{d^2}{a^2} = 2$ entre diagonale et côté d'un carré, $l = \pi d$ entre circonférence et diamètre d'un cercle...). D'où les autres questions : les grandeurs "irrationnelles" vis-à-vis d'une unité sont-elles une exception ou la règle quasi générale ? Peut-on les comparer entre elles et par quel ensemble doit-on remplacer $\mathbb{Q}$ pour les mesurer ? Les Grecs avaient constaté que les irrationnels sont "plus nombreux" que les rationnels mais ils n'ont pu répondre de manière complète à la deuxième question. On sait aujourd'hui que les rationnels forment un ensemble dense, bien que de mesure de Lebesgue nulle, dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

▷ Continuité ; nombres réels ; mesure de Lebesgue

L'approche moderne des nombres réels reprend à son compte toutes les propriétés relatives à $\mathbb{Q}$ (addition, multiplication, ordre, distance...) et donne une méthode de construction par "approximations successives" de l'ensemble $\mathbb{R}$. Cette méthode fait appel à l'**axiome d'Archimède**, qui stipule que quels que soient x et y il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n|x| \geq |y|$, et à l'**axiome de Cauchy des intervalles emboités**, selon lequel il existe un nombre x et un seul dans la famille d'intervalles $\{I_n = [a_n, b_n]\}$ tels que $I_{n+1} \subset I_n$ et $|b_n - a_n| \to 0$ quand $n \to \infty$. En pratique le premier axiome permet d'encadrer tout réel x par des rationnels $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$, et le second permet par des encadrements emboités $\cdots \left[\frac{p_n}{q_n}\left[\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\left[\cdots, \cdots\right]\frac{p_{n+1}+1}{q_{n+1}}\right]\frac{p_n+1}{q_n}\right]\cdots$ de définir x comme la limite des $\frac{p_n}{q_n}$ ou $\frac{p_n+1}{q_n}$ lorsque q_n tend vers l'infini ; on dit que $\mathbb{Q}$ est un **ensemble dense** dans $\mathbb{R}$. Bien évidemment on s'assure que cette définition des réels comme limite de suite de rationnels est unique (notion de suites équivalentes), et qu'elle est compatible avec les opérations définies sur $\mathbb{Q}$ (si $\frac{p_n}{q_n}$ tend vers x et $\frac{r_n}{s_n}$ vers y alors $\frac{p_n r_n}{q_n s_n}$ tend vers $xy = yx$, *etc.*). En base 10, $q_n = 10^n$ ($25,37... = 2\,10^1 + 5\,10^0 + 3\,10^{-1} + 7\,10^{-2} + ...$) ; en base 2, $q_n = 2^n$ (le même nombre est représenté par une suite de 0 et de 1).
En toute base on montre que les rationnels correspondent à des suites de chiffres qui deviennent périodiques à partir d'un certain rang, par exemple $\frac{1}{12} = 0,8333\cdots 3\cdots$ en base 10 et $0,00\,01\,01\cdots 01\cdots$ en base 2, tandis que les non rationnels correspondent à des suites "chaotiques" (*cf.* π, $\sqrt{2}$, le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dont la suite des décimales peut servir à générer des nombres aléatoires...).
Le résultat le plus remarquable de cette construction est que $\mathbb{R}$ est un **ensemble complet** : toute suite de Cauchy de nombres réels (suite de nombres x_n tels que $|x_n - x_m| < \epsilon$ arbitrairement petit dès que n et $m > N(\epsilon)$) converge vers un nombre réel. On peut donc parler de "continuité des nombres réels" (à l'inverse de $\mathbb{Q}$ pour lequel les suites de Cauchy "sortent en général de l'ensemble"). Ceci permet par exemple de définir la **continuité d'une fonction** f ou sa **dérivabilité** : f est continue en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $|f(x) - f(x_0)|$ peut être rendu arbitrairement petit pour x suffisamment proche de x_0, et est dérivable en x_0 si $\frac{f(x_0+\epsilon) - f(x_0)}{\epsilon}$ admet une limite (dérivée en x_0 notée $f'(x_0)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$) pour $\epsilon \to 0$.
Définie par $\mu\big([a,b]\big) = b - a$ pour un intervalle $[a,b]$, la **mesure de Lebesgue** d'un

domaine de $\mathbb{R}$ est nulle pour un point (encadré par les intervalles I_n) de même que pour un ensemble fini ou dénombrable de points (par exemple $\mathbb{Q}$), et s'étend à toutes les intersections et unions dénombrables d'intervalles. Elle est invariante par translation et permet de définir l'**intégrabilité** d'une fonction.

Au sens de **Lebesgue** (resp. **Riemann**) une fonction $y = f(x)$ est intégrable si en partitionnant l'axe y (resp. x) en domaines D_n la quantité $\sum_n y_n\, \mu\big(f^{-1}(D_n)\big)$ (resp $\sum_n f(x_n)\, \mu(D_n)$) a une limite, quels que soient les y_n (resp. x_n) appartenant à D_n, lorsque les $\mu(D_n)$ tendent vers 0 (figure 1a, resp. 1b). Le premier point de vue est mathématiquement plus général (*cf.* $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, avec $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 1 ailleurs, qui vaut 1 pour Lebesgue et n'est pas définie pour Riemann) et pas moins physique (*cf.* section 5.3.4, figure 21).

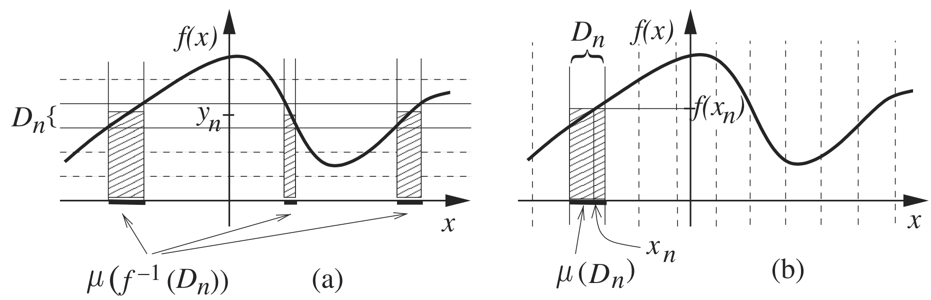

FIGURE 1

1.1.2 Paramétrage additif des lois de composition ; logarithmes

▷ Repérage des grandeurs ; paramétrage additif

Reprenons l'exemple qui consiste à suspendre des masses à un ressort. En pratique, pour les comparer, on “repère” les masses en leur associant le nombre réel x correspondant à l'élongation du ressort. Mais comme la réponse d'un ressort n'est pas en général linéaire, l'accrochage simultané de deux masses ne conduit pas à $x_1 + x_2$ mais à un autre nombre $x_1 {*} x_2$. Cette loi de composition $(x_1, x_2) \to x_1 {*} x_2$ est cependant commutative, associative et possède un élément neutre que l'on peut toujours noter 0. (Le nombre x peut ne pas avoir d'inverse pour cette loi.)

Pour tout repérage “raisonnable” ($x_1 * x_2$ continu et dérivable par rapport à x_1 et x_2), on démontre qu'on peut trouver une fonction $\varphi(x)$, définie à une constante multiplicative λ près, telle que :

$$\varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) \quad ; \quad \varphi(0) = 0 \ .$$

Donc si on associe à chaque grandeur non plus x_i mais $\varphi_i = \varphi(x_i)$, la loi de composition $x = x_1 * x_2$ devient additive $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. La **mesure** d'une grandeur, par opposition à son **repérage**, consiste précisément à trouver ce paramétrage additif. La **grandeur unité** est par définition celle pour laquelle $\varphi = 1$. Quant à la liberté du changement de paramétrage $\varphi \to \lambda\varphi$, elle correspond au choix toujours possible d'une unité λ fois plus petite. Remarquons que ce paramétrage additif est la version continue de l'**étalonnage** qui consiste à associer $\varphi = 1$ à un certain nombre x_1, puis $\varphi = \dfrac{1}{q}$ au nombre x_q tel que $\overbrace{x_q * \cdots * x_q}^{q\,\text{fois}} = x_1$ et $\varphi = \dfrac{p}{q}$ au nombre $\overbrace{x_q * \cdots * x_q}^{p\,\text{fois}}$.

EXEMPLES. Une règle bien graduée traduit additivement la composition "physique" des **translations**. Un cercle bien gradué traduit additivement la composition des **rotations** (le paramètre additif étant l'angle). La loi de composition des **vitesses relatives** à une dimension

$$v = v_1 * v_2 = (v_1 + v_2)\Big(1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}\Big)^{-1}$$

($|v_i| < c$) devient $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ en introduisant la **rapidité** relative φ définie par :

$$e^\varphi = \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \quad \text{ou} \quad \varphi = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}} \quad \text{ou} \quad \frac{v}{c} = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{e^\varphi + e^{-\varphi}} = \tanh\varphi\ .$$

La vitesse v n'est un paramètre additif que dans la limite galiléenne $v \ll c$ ($\tanh\varphi \simeq \varphi \ll 1$).

▷ Multiplication et logarithme

Le logarithme $\mathrm{Log}_a\, x$ d'un nombre x positif est le paramétrage qui rend additif la loi de multiplication $(x_1, x_2) \to x_1 x_2$ sur $\mathbb{R}^+$ (réels positifs) :

$$\mathrm{Log}_a\, x_1 x_2 = \mathrm{Log}_a\, x_1 + \mathrm{Log}_a\, x_2 \qquad \text{(ce qui implique } \mathrm{Log}_a\, 1 = 0)\ .$$

L'unité du paramétrage, appelée **base a du logarithme**, est le nombre dont le logarithme vaut 1 : $\mathrm{Log}_a\, a = 1$. Comme un changement d'unité, donc ici de base, correspond à l'introduction d'un facteur multiplicatif λ on doit avoir $\mathrm{Log}_a\, x = \lambda\,\mathrm{Log}_b\, x$; en posant $x = b$ puis $x = a$ dans cette relation on trouve $\lambda = \mathrm{Log}_a\, b = \big(\mathrm{Log}_b\, a\big)^{-1}$. Les logarithmes les plus utilisés sont les logarithmes népérien (à base $e \simeq 2,7$) noté "ln" et décimal (à base 10) noté "log". Il est utile d'avoir en mémoire les deux valeurs approchées $\ln 10 = \big(\log e\big)^{-1} \simeq 2,3$ et $\log 2 \simeq 0,3$. La fonction logarithme vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Log}_a\, x}{\mathrm{d}x} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathrm{Log}_a\,(x+\epsilon) - \mathrm{Log}_a\, x}{\epsilon} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathrm{Log}_a\big(1+\frac{\epsilon}{x}\big)}{\epsilon} = \frac{1}{x}\left(\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Log}_a\, x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=1}\ .$$

Le **logarithme népérien** est celui pour lequel $\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x}$ (figure 2a).

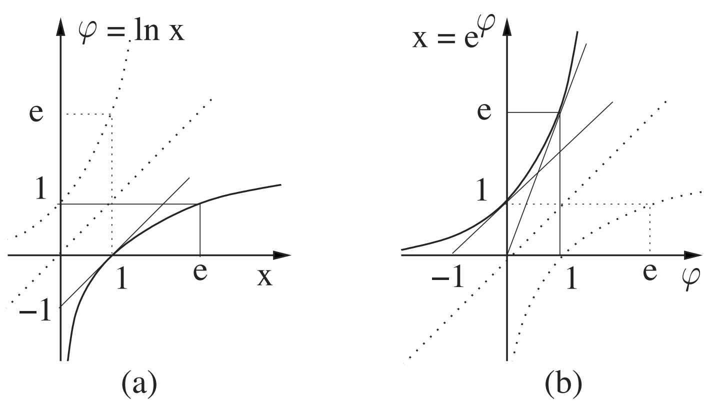

FIGURE 2

EXEMPLES. En chimie, les logarithmes décimaux sont utilisés pour paramétrer des concentrations ou des activités : $pH = -\log\big[H_3O^+\big]$ et $pK_a = -\log\big([A^-][H^+][AH]^{-1}\big)$.
En physique on les introduit pour mesurer des rapports de puissance en **décibels**. Un rapport de 10 dans les puissances correspondant par définition à un écart de 10 décibels (1 Bel) en "échelle logarithmique", on a :

$$\text{“ } \frac{P_2}{P_1} \text{ en décibels ” } = 10\,\log\frac{P_2}{P_1}\ .$$

Un rapport de 2 correspond à 3 décibels.

Les décibels (dB) sont utilisés en acoustique où les “puissances sonores” sont comparées au seuil d'audibilité P_0 égal à 10^{-12} Wm^{-2}. Ainsi 70 dB correspondent à $10^7 P_0 = 10^{-5}$ Wm^{-2}. En électronique il servent à mesurer les gains ; par exemple si la tension à la sortie d'un système est V_s et la tension à l'entrée est V_e, sachant que le rapport des puissances est comme $\left(\frac{V_s}{V_e}\right)^2$, on pose : “gain en dB” $= 20 \log \frac{V_s}{V_e}$. En astronomie un rapport de flux lumineux est mesuré en (écart de) **magnitude** par $\Delta m = 2,5 \log \frac{F_2}{F_1}$.
Dans le domaine des fréquences temporelles une **octave** désigne un rapport de 2 et une **décade** un rapport de 10 ; on a donc “ $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en décades ” $= \log \frac{\omega_2}{\omega_1} = 0.3$ “$\frac{\omega_2}{\omega_1}$ en octaves ”.

1.1.3 Fonction et notation exponentielles ; applications

▷ Multiplication et fonction exponentielle

L'opération exponentielle sur $\mathbb{R}$ est l'opération inverse du logarithme (figure 2b) :

$$\varphi = \ln x \Longleftrightarrow x = e^{\varphi} \quad ; \quad \varphi = \mathrm{Log}_a\, x \Longleftrightarrow x = a^{\varphi} \quad (a > 0)\ .$$

Elle fait donc correspondre à la somme $\varphi_1 + \varphi_2$ d'éléments de $\mathbb{R}$ le produit $x_1 x_2$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Les propriétés suivantes de l'exponentielle sont des conséquences immédiates de celles du logarithme (par exemple $a^b = e^{b \ln a}$ car $\ln a^b = (\mathrm{Log}_a\, a^b)\ \ln a = b \ln a$) :

$$a^{b+c} = a^b\, a^c \quad , \quad a^b = e^{b \ln a} \quad , \quad \left(a^b\right)^c = a^{bc} \quad , \quad a^0 = 1 \qquad (a > 0)\ .$$

La fonction e^{φ} (notée aussi $\exp \varphi$) peut être obtenue plus explicitement comme limite ou sous la forme d'un développement en série convergente :

$$e^{\varphi} = \lim_{N \to \infty} \left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)^N = 1 + \varphi + \frac{\varphi^2}{2!} + \cdots + \frac{\varphi^p}{p!} + \ldots \quad \left(e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots \simeq 2,7\right)\ .$$

La première expression se déduit du fait que $\ln \left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)^N = N \ln \left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)$ tend vers φ lorsque N tend vers l'infini. Quant au développement en série il se déduit de la formule du binôme : $\left(1 + \frac{\varphi}{N}\right)^N = \sum_{p=0}^{N} C_N^p \left(\frac{\varphi}{N}\right)^p \xrightarrow{N \to \infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varphi^p}{p!}$ (car $\frac{N!}{(N-p)!N^p} \xrightarrow{N \to \infty} 1$).
e^{φ} possède la propriété remarquable d'être sa propre dérivée (*cf.* son développement en série). Les tangentes au graphe sont représentées pour $\varphi = 0$ et $\varphi = 1$.

▷ Applications physiques

En physique les fonctions exponentielles apparaissent souvent à travers leur propriété caractéristique

$$f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1)\, f(\varphi_2) \quad \text{équivalente à} \quad f'(\varphi) = f'(0)\, f(\varphi)$$

(puisque $\frac{f(\varphi + \epsilon) - f(\varphi)}{\epsilon} = f(\varphi)\, \frac{f(\epsilon) - 1}{\epsilon}$). Par exemple le rapport $p(\tau) = \frac{N(t+\tau)}{N(t)}$ des populations de noyaux radioactifs non désintégrés aux instants $t + \tau$ et t doit vérifier

$$p(\tau_1 + \tau_2) = p(\tau_1)\, p(\tau_2)$$

si l'on suppose qu'il ne dépend que de l'intervalle de temps τ et pas de t.

En effet $\dfrac{N(t+\tau_1+\tau_2)}{N(t)} = \dfrac{N(t+\tau_1+\tau_2)}{N(t+\tau_2)}\,\dfrac{N(t+\tau_2)}{N(t)}$. On en déduit que la loi qui décrit la **désintégration radioactive** est du type $p(\tau) = \exp(-\lambda\tau)$, ou $\exp\left(-\dfrac{\tau\,\ln 2}{T}\right)$ en introduisant la **demi-période** T c'est-à-dire le temps au bout duquel la moitié des noyaux de l'échantillon se sont désintégrés. On établit par le même raisonnement que l'atténuation de l'intensité d'une onde se propageant selon Ox dans un milieu homogène est donnée par la **loi d'absorption de Beer** $I(x+l) = I(x)\,e^{-\alpha l}$. Par exemple une atténuation de 0,2 dB par kilomètre correspond à $\log I(x)/I(x+l) = 2\,10^{-2}$ et $l = 10^3$m, soit $\alpha \simeq 4,6\times 10^{-5}\mathrm{m}^{-1}$.

▷ Développement de Taylor et écriture exponentielle

L'approche de l'exponentielle e^{φ} par une limite ou une série ne fait appel qu'aux propriétés des deux opérations + et × sur les réels. L'extension de l'exponentielle à d'autres objets mathématiques que les réels (nombres complexes, matrices carrées, opérateurs différentiels...) est très utilisée. Ainsi, à titre d'exemple la formule de Taylor (pour les “bonnes” fonctions) peut s'écrire

$$f(x+a) = f(x) + a\,f'(x) + \frac{a^2}{2!}\,f''(x) + \cdots + \frac{a^p}{p!}\,f^{(p)}(x) + \cdots = e^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}\,f(x)$$

à l'aide de l'exponentielle de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Cela se comprend en remarquant qu'on passe de $f(x)$ à $f\big(x+\dfrac{a}{N}\big)$ par $f\big(x+\dfrac{a}{N}\big) \simeq f(x) + \dfrac{a}{N}\,f'(x) = \Big(1+\dfrac{a}{N}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)\,f(x)$, et par conséquent de $f(x)$ à $f(x+a)$ par l'application de $\lim\limits_{N\to\infty}\Big(1+\dfrac{a}{N}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^N = e^{a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}$. (On établit de même pour l'opération de dilatation : $f(e^a x) = e^{ax\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}\,f(x)$.) On dit que l'opérateur dérivation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ est le générateur de la transformation $f(x)\to f(x+a)$. En **physique quantique** les générateurs des translations d'espace, de temps et des rotations effectuées sur les états ou fonctions d'onde, sont associés aux observables quantité de mouvement, énergie et moment cinétique (*cf.* chapitre 11).

▷ Fonctions hyperboliques (figure 3)

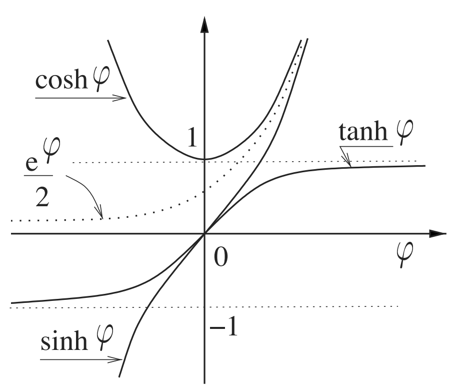

FIGURE 3

A la fonction e^{φ} sont reliées les fonctions cosinus hyperbolique (paire), sinus et tangente hyperboliques (impaires)

$$\cosh\,\varphi = \frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} \quad , \quad \sinh\,\varphi = \frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} \quad , \quad \tanh\,\varphi = \frac{\sinh\,\varphi}{\cosh\,\varphi}\ ,$$

dont les propriétés principales (analogues à celles des fonctions trigonométriques) sont des conséquences immédiates de celles de e^{φ} :

$$\cosh\,\varphi = \sum_{0}^{\infty} \frac{\varphi^{2n}}{(2n)!} \quad ; \quad \sinh\,\varphi = \sum_{0}^{\infty} \frac{\varphi^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad ; \quad \tanh\,\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3} + \cdots$$

$$(\cosh\,\varphi)' = \sinh\,\varphi \quad ; \quad (\sinh\,\varphi)' = \cosh\,\varphi \quad ; \quad (\tanh\,\varphi)' = (\cosh\,\varphi)^{-2}$$

$$\cosh^2\,\varphi - \sinh^2\,\varphi = 1 \quad ; \quad \cosh(\varphi_1+\varphi_2) = \cosh\,\varphi_1\,\cosh\,\varphi_2 + \sinh\,\varphi_1\,\sinh\,\varphi_2\ ;$$

$$\sinh(\varphi_1+\varphi_2) = \sinh\,\varphi_1\,\cosh\,\varphi_2 + \cosh\,\varphi_1\,\sinh\,\varphi_2\ ;\ \tanh(\varphi_1+\varphi_2) = \frac{\tanh\,\varphi_1 + \tanh\,\varphi_2}{1+\tanh\,\varphi_1\,\tanh\,\varphi_2}$$

1.1.4 Mesure additive du désordre microscopique ; grands nombres et entropie ; irréversibilité

▷ Définition de l'entropie et exemples

L'entropie S introduite par Clausius en 1854, qui est la grandeur fondamentale de la thermodynamique, reste encore pour certains une grandeur mystérieuse. En fait ses propriétés découlent de l'interprétation qu'en a donné Planck (1900) : S est une mesure additive du “désordre microscopique” (ou plutôt de la “liberté microscopique”, voir ci-dessous) définie par

$$S = k_B\,\ln\Omega \qquad \left(k_B = \tfrac{R}{\mathcal{N}} = 1,4\times 10^{-23}\,\mathrm{J.K}^{-1};\ k_B \text{ constante de Boltzmann}\right)\ .$$

$\mathcal{N} = 6\ 10^{23} = 1$mole est le nombre d'Avogadro, R la constante des gaz parfaits (*cf.* section 7.4.1). Ω est le **nombre d'états microscopiques** (spécifiés chacun par les positions, quantités de mouvement et états quantiques de toutes les particules) compatibles avec les valeurs V, U, *etc.* des grandeurs volume total, énergie interne totale, *etc.* qui caractérisent un **état d'équilibre macroscopique**.

Par exemple pour un **gaz parfait** constitué de N particules dans un volume V, le volume “libre” moyen par particule est V/N et le nombre de configurations de position est donc proportionnel à $(V/N)^N$. Pour un **gaz parfait monoatomique**, on établit (*cf.* section 7.2.1.) que la contribution à Ω du désordre dans l'espace des vitesses ou quantités de mouvement est proportionnelle à $(U/N)^{\frac{3}{2}N}$; on peut dire aussi que $(2mU/N)^{\frac{3}{2}}$ est un volume “libre” typique dans l'espace (p_x, p_y, p_z) pour une particule d'énergie $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \simeq U/N$; alors $S = R(\ln V + \frac{3}{2}\ln U) + \text{Cste}$ pour une mole.

> *AUTRES EXEMPLES* (justifiables par des arguments qualitatifs ou dimensionnels) :
> 1) $\Omega \propto (U/N)^{\frac{3}{2}N}(U/N)^{\frac{3}{2}N}$ pour un **solide** dont chacun des N atomes est assimilé à un oscillateur à trois dimensions ; dans Ω un facteur est lié à la vitesse et l'autre à l'amplitude de la vibration ; V n'apparaît pas car il n'y a pas de “liberté” de position dans un solide. 2) $\Omega \propto \max_N\,(V/N)^N(U/N)^{3N}$ d'où $S \propto V^{\frac{1}{4}}U^{\frac{3}{4}}$ pour le **corps noir** ; ici $U/N \simeq cp$ est l'énergie typique des photons et on prend le $\max_N$ car leur nombre n'est pas fixé à priori (*cf.* remarque 1 ci-dessous).