COURS DE PHYSIQUE

Mécanique du point

Alain Gibaud
Professeur à l'université du Maine (Le Mans)

Michel Henry
Agrégé de physique
Maître de conférences à l'IUFM des Pays de Loire (Le Mans)

2e édition

DUNOD

Illustration de couverture : Virtua73 © fotolia.com

ISBN 978-2-10-079853-7

AVANT-PROPOS

Le cours présenté dans ce livre est le fruit de plusieurs années d'enseignement dispensé aux étudiants de première année à l'université du Maine. Il s'agit d'un cours d'introduction à la mécanique du point et des systèmes de points matériels. Notre souci au cours de la rédaction de cet ouvrage a été de nous référer aux connaissances acquises par les étudiants dans les classes du secondaire afin d'assurer une transition la plus continue possible.

La principale difficulté que nous avons rencontrée lors de ce cours a été certainement d'ordre mathématique. La mécanique est une science qui exige de la rigueur et les concepts acquis lors de l'apprentissage dans le secondaire sont ici repris de façon plus formelle et rigoureuse. Nous présentons donc, en annexe 1, les outils mathématiques qui nous semblent nécessaires à la bonne compréhension du cours de physique.

Le premier et le second chapitres sont consacrés à la cinématique du point ainsi qu'aux changements de référentiels. Nous insistons plus particulièrement sur la définition du référentiel ; cette définition conditionne bien souvent la façon de traiter un problème et reste, bien des fois, mal comprise.

Nous présentons ensuite les lois fondamentales de la mécanique en décrivant les forces les plus classiques susceptibles d'intervenir dans les problèmes de mécanique. Nous introduisons alors les concepts d'énergie et de puissance avant de présenter les oscillateurs libres et forcés.

La partie suivante montre que pour traiter un problème de mécanique dans un référentiel non galiléen il est nécessaire d'introduire des pseudos forces appelées forces d'inertie. L'étude du poids d'un corps sur Terre met en évidence le fait que le référentiel terrestre n'est pas galiléen. L'étude du phénomène des marées conduit à la même conclusion pour le référentiel géocentrique.

Les deux derniers chapitres sont consacrés au problème à deux corps. L'accent est mis sur la notion de référentiel barycentrique. L'étude de la trajectoire d'un système à deux corps permet de retrouver les lois de Kepler auxquelles obéissent les planètes du système solaire. Une présentation de la mécanique céleste se trouve à la fin du livre en annexe 2.

Cet ouvrage s'adresse bien sûr aux étudiants du premier cycle universitaire mais aussi à ceux des classes préparatoires, du CAPES et de l'agrégation. Nous espérons qu'il leur sera une aide précieuse dans leur effort de compréhension de cette branche de la physique.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

CINÉMATIQUE DU POINT

Pré-requis

- Connaître les systèmes de coordonnées cartésiennes, polaires et cylindriques.
- Savoir dériver les vecteurs de la base polaire ou cylindrique.
- Savoir intégrer quelques fonctions élémentaires (polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielle etc.).
- Ces notions sont reprises en annexe, *Rappel des outils mathématiques*.

Objectif

- ► À partir du vecteur accélération d'un point, savoir retrouver le vecteur vitesse, les équations horaires du mouvement ainsi que l'équation de la trajectoire de ce point.
- ► Connaître l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées.
- ► Connaître la définition de quelques mouvements particuliers traités en fin de chapitre.
- ► L'objet de la cinématique du point est d'étudier le mouvement d'un point au cours du temps indépendamment des causes qui produisent ce mouvement. Les objectifs sont la détermination des grandeurs cinématiques telles que les vecteurs accélération, vitesse, position et l'équation horaire de la trajectoire de ce point par rapport à un référentiel choisi par l'observateur.

1. DE LA NÉCESSITÉ DU RÉFÉRENTIEL

L'étude du mouvement d'un point implique nécessairement la présence simultanée du point et d'un observateur qui analyse le mouvement de ce point. L'observateur est le pilier de l'étude du mouvement car selon sa position par rapport à l'objet en mouvement ses conclusions quant à la nature du mouvement seront très variables. Ainsi, dans un TGV qui se déplace à vitesse constante, un passager qui lâche verticalement une bille conclut que la bille a un mouvement rectiligne. La personne qui est sur le quai et qui observe la même scène conclut que le mouvement n'est pas rectiligne et pourtant il s'agit bien de la même bille. Un mouvement est donc toujours lié à un observateur. On dit qu'il est **relatif**.

Le mouvement d'un objet ne pourra se faire que par rapport à une référence. Il est donc nécessaire de définir ce que l'on appelle un **référentiel** ou **solide de référence** dans lequel l'observateur est fixe. On entend par solide de référence un ensemble de points tous fixes les uns par rapport aux autres. Par exemple, dans le cas cité plus haut, on peut choisir le TGV comme référentiel, l'observateur étant assis à l'intérieur, ou bien le référentiel terrestre (constitué par tout ce qui est fixe par rapport à la Terre) pour la personne restée sur le quai.

La figure 1.1 illustre bien qu'un mouvement est relatif à un référentiel choisi. Ainsi un observateur situé au sommet d'une montagne conclut que le pilote d'un avion se déplace très vite. L'observateur situé sur l'aile conclut de façon très différente que le pilote est bien installé au repos. Nous concluons donc que :

Le mouvement d'un point est toujours relatif à un référentiel.

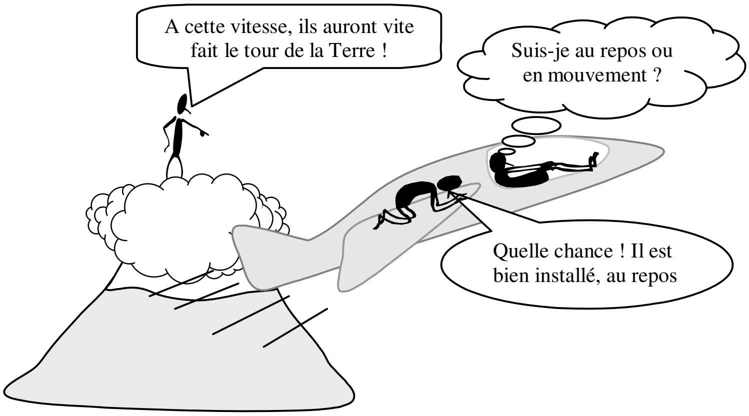


Figure 1.1 • Relativité du mouvement.

Pour caractériser le mouvement de l'objet, l'observateur a ensuite besoin de se repérer dans l'espace $\mathbb{R}^3$ qui l'environne. Il lui faut pour déterminer la nature du mouvement connaître la position du point au cours du temps, c'est-à-dire pouvoir répondre aux questions suivantes :

Où se trouve le point ?

Quand est-il passé à cette position ?

Pour pouvoir répondre à la question *où ?*, il se choisit un **repère d'espace**. Le repère d'espace est défini par une **origine** O qui est fixe dans le référentiel et des **axes de référence** (x, y, z) qui permettent à l'observateur de juger dans quelle direction se trouve l'objet. Ces axes sont eux-mêmes liés au référentiel. En toute logique, l'origine O du repère doit être placée sur l'observateur. Aussi dans le cas de la figure 1.1, le référentiel est le référentiel montagne avec une origine O prise sur l'observateur qui s'y trouve. Cet observateur choisit ses axes x, y, z comme il l'entend afin de repérer la position d'un point de l'avion.

Pour un référentiel donné, il existe autant de repères d'espace que de choix d'origine et d'axes possibles, c'est-à-dire une infinité. Par contre, à un repère d'espace donné ne correspond qu'un seul référentiel constitué par tout ce qui est fixe par rapport à ce repère.

Pour pouvoir répondre à la question *quand ?*, il faut ajouter un repère de temps, c'est-à-dire une grandeur qui est la variable de temps. Cette variable est continue et croissante, ce qui traduit l'irréversibilité du temps. Elle est mesurée au moyen d'une horloge ou chronomètre à partir d'une origine des temps fixée par l'observateur et d'une durée unitaire fixant une **chronologie**.

À chaque **instant**, on associe un nombre réel appelé **date** qui correspond à la durée écoulée depuis l'instant origine.

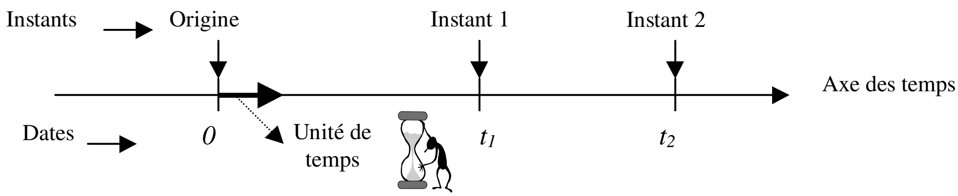


Figure 1.2 • Repère de temps. La durée entre les deux instants 1 et 2 correspond à la différence de leur date $t_2 - t_1$.

En mécanique classique ou newtonienne, on postule que le repère de temps est le même pour tous les référentiels et que le temps s'écoule de la même manière dans des référentiels en mouvement les uns par rapport aux autres. Ce principe d'universalité du temps n'est plus applicable dans le cadre de la mécanique relativiste. Notons que la mécanique relativiste est utilisée dès que la vitesse v d'un objet devient voisine de la célérité c de la lumière dans le vide. La transition entre les deux mécaniques est fixée en général à $v = c/10$.

Pour terminer nous signalons qu'un référentiel peut être caractérisé par son nom. Par exemple, il est très fréquent d'utiliser pour des observations faites à la surface de la Terre le référentiel terrestre. Il est clair alors que l'étude se fera par rapport à la Terre ou par rapport à tout ce qui est fixe sur Terre. On distingue plus particulièrement les référentiels de Copernic (figure 1.3), géocentrique (figure 1.3) et terrestre définis par :

• Le référentiel de Copernic
- **origine : centre du Système Solaire (voisin du centre d'inertie du Soleil) ;**
- **axes dirigés vers les étoiles situées dans des directions fixes par rapport au Soleil ;**
- **propriété : supposé galiléen (voir chapitre 3).**

• Le référentiel géocentrique
- **origine : centre de la Terre ;**
- **axes dirigés parallèlement à ceux du référentiel de Copernic.**

• Le référentiel terrestre
- **origine : point de la surface de la Terre ;**
- **axes fixes par rapport à la Terre.**

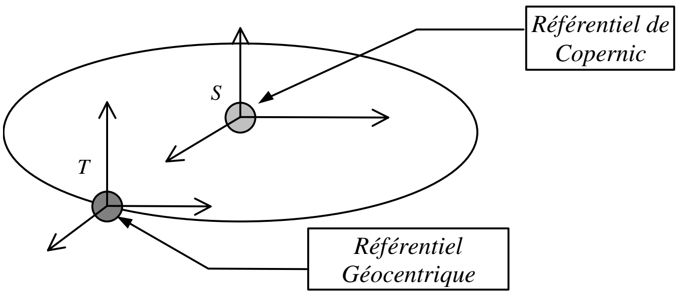


Figure 1.3 • Référentiels de Copernic et géocentrique. Il faut noter que les axes du référentiel géocentrique restent parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

Au lieu de caractériser un référentiel par son nom, on convient souvent de le représenter par le symbole R associé à un repère d'espace et de temps. La notation suivante est d'usage courant :

$$\text{référentiel } R(O, x, y, z, t)$$

Pour une étude plus précise du mouvement d'un point mobile dans un référentiel R on est amené à définir sa position mais aussi des grandeurs vectorielles comme le vecteur vitesse ou accélération de ce point. Il faudra donc faire un choix de **système de coordonnées** (voir annexe : rappel des outils mathématiques) et utiliser la **base** correspondante :

- **(x, y, z) en coordonnées cartésiennes avec la base $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ qui est une base dont les vecteurs sont fixes dans le repère.**
- **(ρ, θ, z) en coordonnées cylindriques avec la base $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k}\right)$ qui est une base dont les deux premiers vecteurs voient leur direction varier au cours du temps.**
- **(r, θ, φ) en coordonnées sphériques avec la base mobile $\left(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi\right)$.**

Il est important de noter que suivant le choix effectué, la base utilisée, comme outil mathématique, peut être fixe ou mobile dans le référentiel donné. Ceci a des conséquences importantes lorsqu'il s'agit de dériver des vecteurs. Pour éviter toute erreur ou confusion, on notera, à chaque fois qu'une étude est entreprise, le choix de la base en précisant si elle est fixe ou pas.

L'association de l'origine d'un repère d'espace, des axes du repère d'espace et de la chronologie définit le **référentiel d'étude**. On notera ensuite la base de projections utilisée en précisant si elle est fixe ou pas dans le référentiel. On notera donc un référentiel d'étude sous la forme présentée sur la figure 1.4.

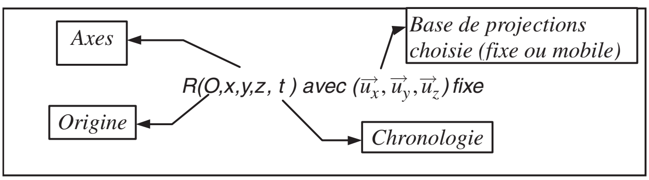


Figure 1.4 • Référentiel d'étude.

On appelle référentiel un solide de référence constitué de l'ensemble des points tous fixes les uns par rapport aux autres.

Un référentiel peut être défini par un de ses repères d'espace muni d'une origine, de trois axes et d'une chronologie : $R(O, x, y, z, t)$

Pour une étude plus précise, on notera, à la suite, la base utilisée en précisant si elle est fixe ou pas : $R(O, x, y, z, t)$ avec (base fixe ou mobile)

Si un référentiel est défini par un de ses repères, on prendra soin de noter :
- l'origine : O ;
- les axes du référentiel : x, y, z ;
- le temps : t.

On précisera ensuite, lorsque l'étude le nécessite, la base de projections dont on indiquera si elle est fixe ou non dans R.

2. VITESSE D'UN POINT MATÉRIEL

2.1. Définition

Soit un point M mobile dans un référentiel $R(O, x, y, z, t)$ avec $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ fixe.

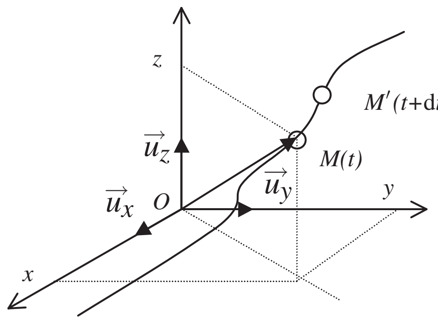


Figure 1.5 • Mouvement d'un point M dans le référentiel R.

On appelle **vitesse** du point M par rapport à R la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ du point M par rapport au temps[1], soit :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$$

Cette définition est la seule qui reste toujours valable quel que soit le problème considéré. D'un point de vue pratique, le calcul du vecteur vitesse se fait en considérant le déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ du point M entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, qui n'est rien d'autre que le vecteur $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$ (annexe 1, 6.5.).

1. *La notation* $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ *est qualifiée de notation de Leibniz.*

2.2. Expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes

Lorsque le repère dans lequel le mouvement est étudié est cartésien, la position du point M s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z$$

Les vecteurs $\left(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z\right)$ sont constants et la dérivée de la position conduit à :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_z$$

L'écriture précédente peut être condensée en utilisant les variables surmontées d'un point pour décrire la dérivation temporelle. On écrit alors la vitesse de la façon suivante :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

2.3. Vitesse en coordonnées polaires ou cylindriques

On appelle coordonnées cylindriques des coordonnées relatives à une base tournante $\left(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\right)$ autour de l'axe z dans le référentiel R. Les coordonnées sont dites cylindriques si elles font intervenir une coordonnée z en dehors du plan (O, x, y) et polaires dans le cas contraire.

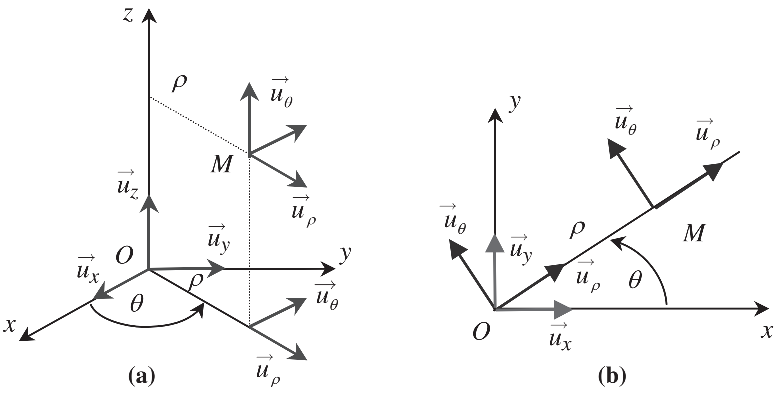


Figure 1.6 • Système de cordonnées cylindriques **(a)** et polaires **(b)**.

En général, la base $\left(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\right)$ est représentée au point M considéré mais elle peut tout aussi bien être placée en O.

Si le point M se déplace dans le plan xOy (figure 1.6b), il peut être repéré par ses coordonnées polaires $\rho = OM$ et la position angulaire $\theta = (\widehat{\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{OM}})$.

Dans la base mobile $\left(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\right)$, la position du point M est alors définie par le vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_\rho$$

Il est impératif de remarquer que la base $\left(\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z\right)$ est une base orthonormée et que les vecteurs $\overrightarrow{u}_\rho, \overrightarrow{u}_\theta$ sont des **vecteurs mobiles et donc variables** dans le temps, contrairement aux vecteurs $\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z$ qui eux sont fixes.

En appliquant la définition de la vitesse, il est possible d'exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base mobile, soit :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\rho\overrightarrow{u}_\rho)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u}_\rho + \rho\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\rho}{\mathrm{d}t}$$

Le calcul de la vitesse peut se faire en utilisant le théorème du vecteur unitaire tournant (annexe 1, 5.2.) qui impose que :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}_\rho}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{u}_\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

ce qui engendre qu'en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \dot{\rho}\overrightarrow{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$$

En coordonnées cylindriques (figure 1.6a), il suffit de rajouter la troisième composante suivant l'axe Oz :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_\rho + z\overrightarrow{u}_z$$

L'expression du vecteur vitesse est alors obtenue en ajoutant la composante suivant $\overrightarrow{u}_z$:

$$\overrightarrow{v}_{M/R} = \dot{\rho}\overrightarrow{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$$

L'utilisation des coordonnées cylindriques (ou polaires) est appréciable dès que le mouvement du point *M* est curviligne (circulaire ou elliptique).

Le vecteur vitesse que nous avons calculé et exprimé dans la base polaire représente la vitesse du point par rapport au référentiel *R*. Il s'agit bien du même vecteur que l'on exprime dans la base cartésienne par :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{x}\,\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\,\overrightarrow{u}_y$$

2.4. Vitesse dans la base de Frenet

Il est également possible de déterminer la vitesse du point M dans le référentiel R en utilisant une nouvelle base appelée **base de Frenet**. La base de Frenet est une base locale qui se déplace avec le point M. Elle est utilisée lorsque le mouvement du point M est curviligne. Elle fait intervenir le **cercle osculateur** à la trajectoire du point M, c'est-à-dire le cercle qui est tangent localement à la trajectoire du point M. L'un des vecteurs de base est tangent à la trajectoire et est orienté dans le sens positif donné à la trajectoire, l'autre vecteur est dirigé selon le rayon de courbure de la trajectoire, vers le centre du cercle osculateur.

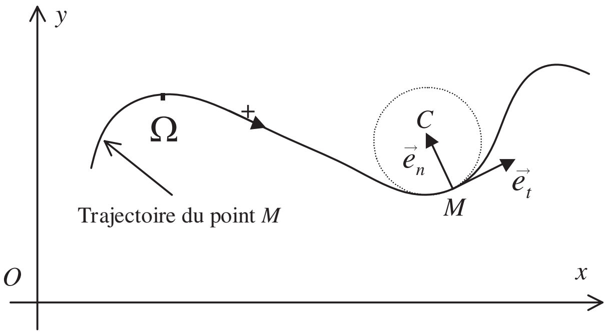


Figure 1.7 • Abscisse curviligne et base de Frenet.

La vitesse du point M est par définition :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

avec $s = \overset{\frown}{\Omega M}$ (mesure algébrique sur la courbe de la distance ΩM).

Lorsque l'on fait varier de façon élémentaire la position du point M en décrivant la trajectoire, l'abscisse curviligne du point M passe de s à $s + \mathrm{d}s$ entre l'instant t et l'instant $t + \mathrm{d}t$. Le déplacement élémentaire du point M s'écrit donc :

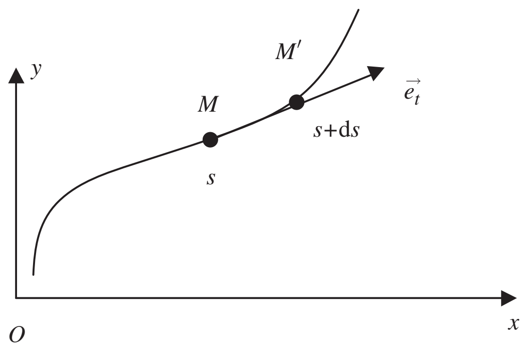


Figure 1.8 • Présentation du déplacement élémentaire sur la trajectoire curviligne.

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}s\,\vec{e}_t$$

ce qui permet d'écrire que la vitesse dans la base de Frenet est :

$$\vec{v}_{M/R} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t = \dot{s}\,\vec{e}_t$$

Remarque. Le vecteur unitaire tangent à la trajectoire peut être déterminé analytiquement à partir de l'équation ci-dessus :

$$\vec{e}_t = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s}$$

3. ACCÉLÉRATION D'UN POINT MATÉRIEL

3.1. Définition

On appelle accélération d'un point matériel M par rapport à un référentiel R la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps, soit :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_{M/R}}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$$

L'accélération est aussi la dérivée seconde de la position par rapport au temps.

3.2. Expression en coordonnées cartésiennes

Considérons une base orthonormée cartésienne $\left(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ du référentiel R servant à définir la position du point M. L'accélération du point M dans cette base s'écrit, puisque les vecteurs de base $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sont constants :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_{M/R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\,\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

avec la notation suivante : $\ddot{x} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$.

3.3. Expression en coordonnées polaires ou cylindriques

Si l'on utilise comme base de référence du référentiel la base polaire $\left(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta\right)$ qui est une base qui tourne avec la position du point M dans le plan (xOy), nous avons montré que la vitesse dans cette base s'écrit : $\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

L'accélération du point M par rapport au référentiel R s'exprime dans cette base par :

$$\vec{a}_{M/R} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}_{M/R}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}{\mathrm{d}t} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_\rho}{\mathrm{d}t} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\,\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t}$$

En utilisant le théorème du vecteur unitaire tournant, il vient :

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

L'accélération du point M dans cette base a deux composantes : une composante radiale (suivant $\vec{u}_\rho$) et une composante orthoradiale (suivant $\vec{u}_\theta$).

En coordonnées polaires, le vecteur accélération s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

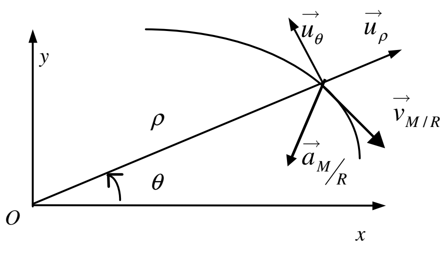


Figure 1.9 • Vecteurs vitesse et accélération en coordonnées polaires.

En coordonnées cylindriques, il suffit de rajouter la troisième composante suivant l'axe Oz :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$$

L'expression du vecteur accélération est obtenue en ajoutant la composante $\ddot{z}$ suivant $\vec{u}_z$:

$$\vec{a}_{M/R} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + 2(\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$$

3.4. Expression dans la base de Frenet

L'accélération du point M peut également s'exprimer dans la base de Frenet. Dans cette base, la vitesse s'écrit :

$$\vec{v}_{M/R} = \dot{s}\,\vec{e}_t$$

ce qui entraîne pour l'accélération :

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{s}\,\vec{e}_t + \dot{s}\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

À un instant t, au point M de la trajectoire, le vecteur de base fait un angle α avec la direction de l'axe des x. À l'instant $t + \mathrm{d}t$, ce vecteur tourne d'un angle $\mathrm{d}\,\alpha$ (figure 1.10).

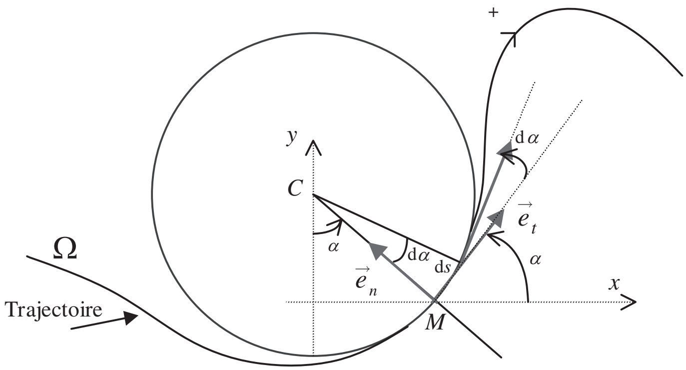


Figure 1.10 • Base de Frenet et déplacement élémentaire.

La dérivée, par rapport au temps, de ce vecteur unitaire est donc donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_t}{\mathrm{d}t} = \dot{\alpha}\,\vec{e}_n$$

De plus on a , avec R = rayon du cercle osculateur :

$$\mathrm{d}s = CM\,\mathrm{d}\,\alpha = R\,\mathrm{d}\,\alpha$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}\,\alpha}{\mathrm{d}t} = \dot{\alpha} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\dot{s}$$

On obtient donc :

$$\dot{s}\frac{\mathrm{d}\,\vec{e}_t}{\mathrm{d}t} = \dot{s}\dot{\alpha}\,\vec{e}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\vec{e}_n = \frac{v_{M/R}^2}{R}\vec{e}_n$$

ce qui conduit à :

$$\vec{a}_{M/R} = \ddot{s}\,\vec{e}_t + \frac{v_{M/R}^2}{R}\vec{e}_n$$

Remarques

- On pourra vérifier que ce résultat est toujours vrai quelle que soit la concavité de la trajectoire.
- La composante normale étant toujours positive, le vecteur accélération est toujours tourné vers la concavité de la trajectoire au point considéré.

4. RÉCAPITULATIF

Nous présentons dans le tableau suivant le récapitulatif des expressions que nous avons introduites précédemment.

Base	Position	Vitesse	Accélération
Cartésienne $O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y, \overrightarrow{u}_z$	$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x + y\overrightarrow{u}_y + z\overrightarrow{u}_z$	$\vec{v}_{M/R} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$	$\vec{a}_{M/R} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\overrightarrow{u}_z$
Cylindrique $O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \overrightarrow{u}_z$	$\overrightarrow{M} = \rho\vec{u}_\rho + z\overrightarrow{u}_z$	$\vec{v}_{M/R} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u}_z$	$\vec{a}_{M/R} = \left\vert \begin{array}{c} (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho \\ (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta \\ \ddot{z}\overrightarrow{u}_z \end{array} \right.$
Base de Frenet $\Omega; \vec{e}_t, \vec{e}_n$	$s = \Omega\overset{\frown}{M}$	$\vec{v}_{M/R} = \dot{s}\vec{e}_t = v\vec{e}_t$	$\vec{a}_{M/R} = \ddot{s}\vec{e}_t + \dfrac{v^2}{R}\vec{e}_n$

Remarque. Il est également possible de définir, à partir de la position angulaire d'un point M se déplaçant dans le plan O, x, y, le vecteur *vitesse angulaire* $\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\overrightarrow{u}_z$ et le vecteur *accélération angulaire* $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t} = \ddot{\theta}\overrightarrow{u}_z$. Ces vecteurs sont perpendiculaires au plan dans lequel se fait le mouvement de M.

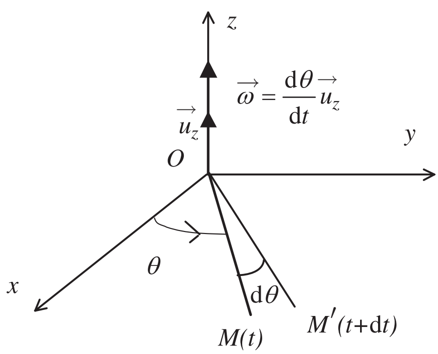


Figure 1.11 • L'angle θ croît au cours du temps donc la valeur algébrique de la vitesse angulaire est positive et le vecteur vitesse angulaire est dirigé dans le sens des z positifs.

Le signe de $\dot{\theta}$ (et donc le sens du vecteur $\overrightarrow{\omega}$) permet de savoir dans quel sens le système tourne en appliquant la règle habituelle du tire-bouchon (voir annexe). La figure 1.11 illustre ce propos ; le point M tourne dans le sens trigonométrique et le tire bouchon qui tourne dans ce sens se déplace dans le sens des $z > 0$. Le vecteur vitesse angulaire est donc orienté dans le même sens que $\overrightarrow{u}_z$.

Le mouvement est accéléré si $|\dot{\theta}|$ croît avec le temps c'est-à-dire si $\dot{\theta}^2$ est une fonction croissante du temps. La dérivée $2\dot{\theta}\ddot{\theta}$ doit être positive. L'étude du signe du produit $\dot{\theta}\ddot{\theta}$ indiquera si le mouvement est accéléré ($\dot{\theta}\ddot{\theta} > 0$, les deux vecteurs vitesse et accélération angulaires ont le même sens) ou décéléré ($\dot{\theta}\ddot{\theta} < 0$, les deux vecteurs sont alors de sens contraire).

Encart 1.1. Les équations différentielles du mouvement

L'étude du mouvement d'un point matériel a pour but de déterminer les équations horaires de la trajectoire, c'est-à-dire la loi d'évolution des composantes de la position du point matériel en fonction du temps. Les équations horaires de la trajectoire ne peuvent être obtenues que si l'on connaît au préalable l'accélération de ce point. C'est en faisant le bilan des actions qui agissent sur le point matériel que l'on détermine, par la relation fondamentale de la dynamique, l'accélération du point matériel. On obtient alors l'**équation différentielle** du mouvement du point matériel, c'est-à-dire une équation qui relie l'accélération, la vitesse et la position instantanée du point à la variable t. Nous distinguerons plusieurs types d'équations différentielles selon leurs formes. À titre d'exemple non exhaustif, nous trouvons les équations différentielles suivantes :

$$\ddot{x} = 0\ ; \qquad \dot{x} + ax = 0\ ; \qquad \ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

La dernière équation est sans doute l'une des équations les plus connues de la physique puisqu'on la rencontre dans tous les problèmes d'oscillateurs, que ce soit en mécanique ou en électricité. Cette équation fait intervenir seulement la variable x ainsi que ses dérivées. Elle est qualifiée de linéaire car si la variable x est multipliée par une constante il en va de même pour ses dérivées, ce qui fait que la forme de l'équation n'est pas modifiée si elle est multipliée par une constante. Sa résolution ne pose pas de difficultés particulières. Il faut cependant noter que ce type d'équation résulte d'une modélisation souvent simplifiée de phénomènes physiques et que la réalité est parfois plus complexe. Les problèmes réels font souvent appel à des équations différentielles non linéaires qui associent par exemple la variable x à une puissance $n > 1$ à ses dérivées, comme l'équation suivante :

$$\dot{x} + ax^3 = 0$$

On voit alors que, si la variable x est multipliée par une constante, l'équation change de forme. Dans de tels cas l'utilisation de l'ordinateur devient le seul recours possible pour déterminer la solution qui dépend très fortement des conditions initiales du mouvement (« effet papillon »).

À partir de l'équation différentielle du mouvement du point, on détermine les équations horaires du mouvement. Il importe de noter que généralement il existe autant d'équations différentielles qu'il y a de variables de position dans le problème. L'obtention des équations horaires du mouvement se fait par intégration des équations différentielles.

5. EXEMPLES DE MOUVEMENTS

5.1. Mouvements rectilignes

a) Le mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement d'un point matériel est dit **rectiligne uniforme** si le point matériel se déplace à vecteur vitesse constant.

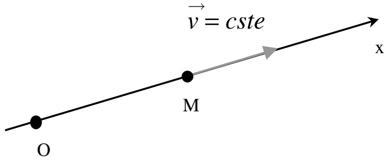


Figure 1.12 • Mouvement rectiligne uniforme ; le point M se déplace sur une droite à vitesse constante.

$$\textbf{Mouvement rectiligne uniforme} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{v} = \overrightarrow{cste}$$

Le vecteur vitesse étant constant, le mouvement est rectiligne car la vitesse est tangente à la trajectoire. La droite sur laquelle le point se déplace est assimilée à l'axe des x. L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors :

$$\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x = C\overrightarrow{u}_x \Rightarrow \dot{x} = C$$

ce qui conduit à l'équation horaire suivante :

$$x = Ct + x_0$$

b) Le mouvement uniformément varié

Un mouvement est dit rectiligne uniformément varié si le vecteur accélération est constant et la trajectoire rectiligne.

Mouvement rectiligne uniformément varié $\Longleftrightarrow$ $\vec{a} = \overrightarrow{cste}$ et trajectoire rectiligne

Si le mouvement est rectiligne, il est commode de se fixer comme axe du mouvement l'axe des x. On aura donc :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u}_x \Longrightarrow \overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u}_x \Longrightarrow \overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x$$

et

$$\overrightarrow{a} = \ddot{x}\overrightarrow{u}_x = C\overrightarrow{u}_x$$

Par intégration de cette équation nous obtenons la vitesse du point M :

$$v = \dot{x} = Ct + B$$

ce qui, par une nouvelle intégration, conduit à l'équation horaire du mouvement :

$$x = \frac{1}{2}Ct^2 + Bt + D$$

Les constantes B et D qui sont apparues dans les deux intégrations successives, sont déterminées par les *conditions initiales* du mouvement du point M. Ainsi, si le point M a une vitesse nulle et est en $x = x_o$ à $t = 0$, les constantes B et D deviennent $B = 0$ et $D = x_o$ et l'équation horaire du mouvement s'écrit alors :

$$x = \frac{1}{2}Ct^2 + x_o$$

Remarques. Le mouvement est uniformément accéléré si la norme du vecteur vitesse est une fonction croissante de t, soit v^2 fonction croissante. La dérivée de v^2 doit donc être positive. La condition sera :

$$\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} > 0 \Longrightarrow 2v.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} > 0$$

L'étude du signe du produit de la vitesse par l'accélération permettra de préciser si le mouvement est *accéléré* $(\dot{x}\,.\,\ddot{x} > 0)$ ou *retardé* $(\dot{x}\,.\,\ddot{x} < 0)$.

Avoir un vecteur accélération constant ne suffit pas pour dire que le mouvement est rectiligne. Il faut aussi que le vecteur vitesse ait la même direction que le vecteur accélération. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement parabolique qui est traité à la fin de ce chapitre.

Encart 1.2. Un mouvement plus complexe

Nous considérons maintenant le cas d'un mouvement rectiligne plus complexe dans lequel nous supposons que l'accélération est de la forme :

$$\ddot{x} = pt$$

où p est une constante.

L'accélération est variable dans le temps et nous recherchons l'équation horaire du mouvement. Nous effectuons donc deux intégrations successives qui nous conduisent d'une part à la vitesse :

$$\ddot{x} = pt \implies \mathrm{d}v = pt\,\mathrm{d}t \implies v = \int pt\,\mathrm{d}t$$

soit

$$v = p\frac{t^2}{2} + q = \dot{x}$$

et d'autre part à la position :

$$x = p\frac{t^3}{6} + qt + r$$

Comme toujours les constantes d'intégration q et r sont déterminées par les conditions initiales du mouvement qui, si elles se résument à $x = 0$ et $v = 0$ à $t = 0$, conduisent à :

$$x = p\frac{t^3}{6}$$

c) Mouvement rectiligne sinusoïdal

Le mouvement d'un point M est dit rectiligne sinusoïdal si, se produisant sur un axe Ox, l'abscisse x du point M s'écrit :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Le terme $\omega t + \varphi$ est appelé **phase à l'instant** t avec φ la phase à l'origine des dates ($t = 0$). Le terme X_m correspond à l'amplitude du mouvement, x variant sinusoïdalement de $-X_m$ à X_m comme le montre la figure 1.13. La vitesse a pour expression :

$$v = \dot{x} = -X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

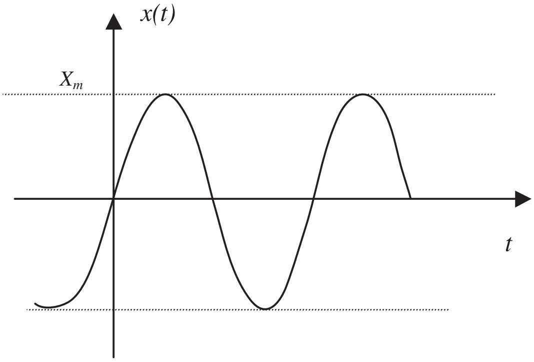


Figure 1.13 • Représentation du mouvement sinusoïdal dans le temps.

et l'accélération :

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Cette équation correspond à l'équation différentielle du second ordre d'un oscillateur harmonique.

Remarque. La solution de cette équation différentielle peut s'écrire de différentes façons, toutes équivalentes. On a :

$$x = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \sin(\omega t + \varphi') = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

En utilisant les relations trigonométriques usuelles, on obtient très simplement :

$$\varphi' = \varphi + \pi/2 \; ; \;\; A = -X_m \sin \varphi \; ; \;\; B = X_m \cos \varphi.$$

5.2. Mouvement circulaire uniforme

Le mouvement d'un point est dit **circulaire uniforme** si :

- le point se déplace sur un cercle ;
- sa vitesse angulaire de rotation est constante.

L'équation différentielle du mouvement est donnée par :

$$\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} = \omega = cste$$

ce qui conduit par intégration à

$$\theta = \omega t + \theta_o$$

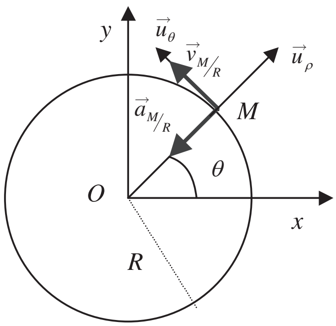


Figure 1.14 • Mouvement circulaire uniforme.

Les caractéristiques cinématiques du mouvement circulaire uniforme peuvent se déduire du schéma de la figure 1.14 et sont données par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho \overrightarrow{u}_\rho(t) = \rho \cos\theta \overrightarrow{u}_x + \rho \sin\theta \overrightarrow{u}_y$$

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\left(\rho \overrightarrow{u}_\rho(t)\right)}{\mathrm{d}\,t} = \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta(t)$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{v}(t)}{\mathrm{d}\,t} = -\rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho(t)$$

Nous remarquons donc que le mouvement circulaire uniforme est un mouvement accéléré dont l'accélération est centripète. En remarquant que $\overrightarrow{u}_\theta = \overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_\rho$ (annexe 1, 4.) on peut donner une expression du vecteur vitesse indépendante de la base choisie. En effet on obtient :

$$\overrightarrow{v}(t) = \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta(t) = \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z \wedge \overrightarrow{u}_\rho(t) = \dot{\theta}\overrightarrow{u}_z \wedge \rho\overrightarrow{u}_\rho(t) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)$$

Dans cette expression $\vec{\omega}$ est le vecteur vitesse angulaire. Cette relation est valable pour tout mouvement circulaire. On obtient de même pour le vecteur accélération :

$$\vec{a}(t) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)\right) = \vec{\omega} \wedge \vec{v}(t)$$

Ce résultat peut être obtenu directement en dérivant le vecteur vitesse exprimé sous forme d'un produit vectoriel

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}(t)\right)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{\omega}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{OM}(t) + \vec{\omega} \wedge \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OM}(t)}{\mathrm{d}t}$$

Si le mouvement est circulaire uniforme, le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est un vecteur constant. Sa dérivée étant nulle, on retrouve bien l'expression du vecteur accélération.

5.3. Le mouvement hélicoïdal

Le mouvement hélicoïdal est la combinaison d'un mouvement de translation rectiligne uniforme selon l'axe des z et d'un mouvement circulaire uniforme dans le plan xOy.

Les équations horaires du mouvement selon les trois axes x, y, z du référentiel cartésien sont :

$$x(t) = R\cos\omega t\ ; \qquad y(t) = R\sin\omega t\ ; \qquad z(t) = v_o t$$

Il est facile de déterminer par dérivations successives les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point dans cette base :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} -R\omega\sin\omega t \\ R\omega\cos\omega t \\ v_o \end{vmatrix} \qquad \vec{a}_{M/R} \begin{vmatrix} -R\omega^2\cos\omega t \\ -R\omega^2\sin\omega t \\ 0 \end{vmatrix}$$

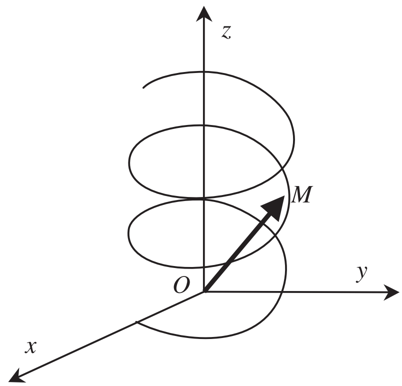


Figure 1.15 • Illustration d'un mouvement hélicoïdal.

De même, les expressions de la vitesse et de l'accélération dans la base cylindrique sont données par :

$$\vec{v}_{M/R} = \begin{vmatrix} 0 \\ R\omega \\ v_0 \end{vmatrix} \qquad \vec{a}_{M/R} \begin{vmatrix} -R\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

5.4. Le mouvement parabolique

Supposons que le vecteur accélération soit un vecteur constant et qu'à l'instant $t = 0$ le vecteur vitesse $\vec{v}_o$ soit donné. Le choix du repère étant libre, nous pouvons décider de le définir à partir des données du problème. Nous faisons le choix suivant pour des raisons de bon sens (figure 1.16) :

- origine du repère : position du point à $t = 0$;
- axe z suivant le vecteur accélération, soit $\vec{a} = a_o \vec{u}_z$;

- axe x perpendiculaire à l'axe z et dans le plan contenant $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{v}_o$. On aura alors :

$$\overrightarrow{v}_o = v_{ox}\overrightarrow{u}_x + v_{oz}\overrightarrow{u}_z$$

- axe y défini de sorte que $\overrightarrow{u}_x$, $\overrightarrow{u}_y$, $\overrightarrow{u}_z$ forment une base orthonormée directe.

On obtient, par intégrations successives et en tenant compte des conditions initiales :

$$\overrightarrow{a}_{M/R}\left|\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ a_o \end{array}\right. \Longrightarrow \overrightarrow{v}_{M/R}\left|\begin{array}{c} v_{ox} \\ 0 \\ a_o t + v_{oz} \end{array}\right.$$

soit

$$\overrightarrow{OM} = \left|\begin{array}{c} x = v_{ox}t + x_o = v_{ox}t \\ y = y_o = 0 \\ z = \frac{1}{2}a_o t^2 + v_{oz}t + z_o = \frac{1}{2}a_o t^2 + v_{oz} \end{array}\right.$$

Dans le cas où $\overrightarrow{v_o} = 0$, on retrouve le mouvement rectiligne uniformément varié suivant l'axe des z.

Pour $v_{ox} \neq 0$, le mouvement est un mouvement plan, dans le plan défini par le vecteur accélération et le vecteur vitesse à l'instant $t = 0$.

Le mouvement projeté suivant l'axe des x est un mouvement uniforme de vitesse v_{ox} .

Le mouvement projeté suivant l'axe des z est uniformément varié, d'accélération constante a_o .

En éliminant la variable t entre les deux équations horaires du mouvement, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_{ox}} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{1}{2}a_o\frac{x^2}{v_{ox}^2} + v_{oz}\frac{x}{v_{ox}}$$

Si α est l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{v_o}$ avec l'axe des x et v_o la norme de ce vecteur vitesse, on peut encore écrire :

$$z = \frac{1}{2}a_o\frac{x^2}{v_o^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha \qquad (1.1)$$

La trajectoire est une portion de parabole.

La figure 1.16 représente la trajectoire d'un projectile pour lequel le vecteur accélération vaut :

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u}_z \Longrightarrow a_o = -g$$

où g est l'accélération de la pesanteur.

La **flèche** h correspond à l'altitude maximale que peut atteindre le point mobile. La **portée** d correspond à la distance maximale que peut atteindre le point lorsque qu'il revient à l'ordonnée $z = 0$.

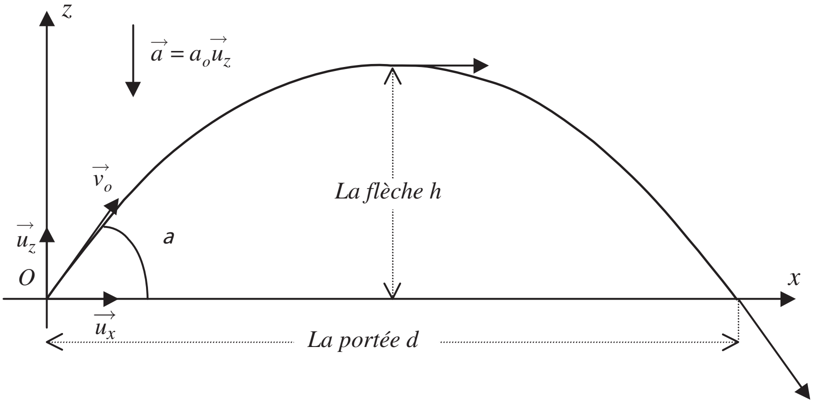


Figure 1.16 • Chute parabolique. L'accélération correspond ici à l'accélération de la pesanteur.

a) Calcul de la portée

$$z = 0 \implies x = 0 \text{ et } x = d = \frac{v_o^2}{a_o} 2 \sin\alpha \cos\alpha = \frac{v_o^2}{g} \sin 2\alpha$$

La portée est maximale pour $2\alpha = \pi/2$, soit pour un angle $\alpha = \pi/4 = 45°$ (il importe de noter que ce résultat n'est valide que si l'on part d'une altitude de lancement $z = 0$).

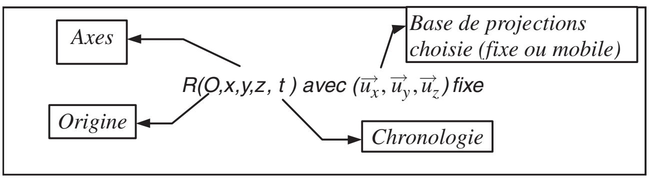
b) Calcul de la flèche

Elle peut être obtenue de différentes façons. On peut rechercher, par exemple, l'ordonnée correspondant à l'abscisse $x = d/2$. On obtient alors :

$$h = \frac{v_o^2}{2g} \sin^2 \alpha$$

À RETENIR

➤ L'étude du mouvement d'un point nécessite un référentiel caractérisé par :



➤ Expressions des vecteurs position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ et accélération $\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$ dans les différents systèmes de coordonnées.