

Table des matières

1	Grandeurs et mesures	1
1.1	Grandeurs physiques	1
	Définition	1
	Étalons	1
	Système International d'unités (SI)	2
	Préfixes	2
	Constantes fondamentales	2
1.2	Analyse dimensionnelle	3
	Dimension d'une grandeur physique	3
	Équation aux dimensions	3
1.3	Mesure des grandeurs	3
	Mesurage	3
	Présentation d'un résultat	4
	Utilisation d'un grand nombre de mesures	4
	<i>Mots clés</i>	5
	<i>Exercices</i>	6
	<i>Solutions</i>	6
2	Les nombres	8
2.1	Nombres réels	8
	Généralités	8
	Sommes et produits	9
	Approximations décimales	9
2.2	Nombres complexes	10
	Forme algébrique	10
	Forme trigonométrique	11
	Exponentielle complexe	12
2.3	Systèmes linéaires	13
	Généralités	13

	Systèmes triangulaires	13
	Méthode du pivot de Gauss	14
	<i>Mots clés</i>	15
	<i>Exercices</i>	15
	<i>Solutions</i>	17
3	Calcul vectoriel	23
	3.1 Barycentre de points pondérés	23
	Définition	23
	Propriétés	24
	Applications	24
	3.2 Produit scalaire	24
	Définition	24
	Propriétés	26
	Orthogonalité	26
	Applications	27
	3.3 Produit vectoriel	27
	Définitions	27
	Propriétés	28
	Applications	28
	3.4 Produit mixte	28
	Définition	28
	Propriétés	28
	Applications	28
	<i>Mots clés</i>	29
	<i>Exercices</i>	29
	<i>Solutions</i>	31
4	Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R}	36
	4.1 Généralités	36
	Sens de variation	36
	Parité, périodicité	37
	4.2 Limites	37
	Définitions	37
	Propriétés des limites	38
	Fonctions équivalentes	39
	4.3 Continuité	40
	Définitions	40

Continuité et opérations	40
Image d'un intervalle par une fonction continue	40
4.4 Dérivabilité	41
Définitions	41
Interprétations	41
Propriétés	42
4.5 Fonctions usuelles	44
Fonctions logarithmes, exponentielles, puissances	44
Fonctions circulaires réciproques	46
<i>Mots clés</i>	49
<i>Exercices</i>	50
<i>Solutions</i>	51
5 Compléments sur les fonctions dérivables	58
5.1 Étude globale des fonctions dérivables	58
Extrémum	58
Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	59
Inégalité de Taylor-Lagrange	59
5.2 Étude locale des fonctions dérivables	60
Formule de Taylor-Young	60
Développements limités	60
Opérations sur les développements limités	62
Applications des développements limités	63
5.3 Convexité	63
Définitions	63
Fonctions convexes dérivables	65
<i>Mots clés</i>	65
<i>Exercices</i>	65
<i>Solutions</i>	67
Calcul intégral	74
6.1 Intégration sur un segment	74
Approche théorique	74
Propriétés	76
Exemples en physique	77
6.2 Calcul des primitives	78
Linéarité	78
Intégration par parties	78
Intégration par changement de variable	79

6.3	Intégrales généralisées	79
	Définitions	79
	Propriétés	80
	Situations de référence	80
	Fonctions sommables	82
	<i>Mots clés</i>	82
	<i>Exercices</i>	83
	<i>Solutions</i>	84

7 Équations différentielles **90**

7.1	Définitions générales	90
	Équations différentielles	90
	Problème de Cauchy	91
7.2	Équations différentielles du premier ordre	91
	Exemple	91
	Équations à variables séparables (ou séparées)	92
7.3	Équations linéaires du premier ordre	92
	Définition	92
	Théorème du à la linéarité	92
	Résolution de l'équation homogène associée	93
	Recherche d'une solution particulière	93
7.4	Équations différentielles linéaires	
	du second ordre à coefficients constants	93
	Définition	93
	Théorèmes dus à la linéarité	93
	Résolution de l'équation homogène associée	94
	Résolution de l'équation complète dans quelques cas	95
	<i>Mots clés</i>	96
	<i>Exercices</i>	96
	<i>Solutions</i>	99

8 Suites numériques **109**

8.1	Généralités	109
	Définition	109
	Suite monotone	109
	Suite bornée	110
8.2	Limite d'une suite	110
	Suite convergente	110

Limites infinies	110
Opérations sur les suites convergentes	111
Relation d'ordre	111
8.3 Existence de limites	112
Convergence des suites monotones	112
Suites adjacentes	112
Suites extraites	112
8.4 Suites récurrentes	113
Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	113
Suites récurrentes linéaires du second ordre	113
<i>Mots clés</i>	115
<i>Exercices</i>	115
<i>Solutions</i>	116

9 Fondements du calcul matriciel **120**

9.1 Espaces vectoriels	120
Généralités	120
Sous-espaces vectoriels	121
Bases d'un espace vectoriel, dimension	121
Applications linéaires	122
9.2 Matrices	122
Généralités	122
Écritures matricielles	123
Opérations	124
Changement de bases	125
9.3 Déterminants	126
Généralités	126
Opérations sur les lignes ou les colonnes	127
Autres propriétés	127
<i>Mots clés</i>	129
<i>Exercices</i>	130
<i>Solutions</i>	132

10 Réduction des matrices **140**

10.1 Valeurs propres et vecteurs propres	140
Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme	140
Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice carrée	141
Polynôme caractéristique	141

10.2 Diagonalisation	141
Définitions	141
Conditions	142
10.3 Applications	142
Calcul de A^m	142
Systèmes différentiels à coefficients constants	142
<i>Mots clés</i>	143
<i>Exercices</i>	143
<i>Solutions</i>	146
11 Fonctions de plusieurs variables	160
11.1 Espace \mathbb{R}^n	160
Norme sur un espace vectoriel	160
Parties remarquables de \mathbb{R}^n	161
11.2 Fonctions de plusieurs variables	162
Définitions	162
Limite et continuité	163
Composition des fonctions continues	163
11.3 Dérivées partielles ; différentielle	164
Dérivation d'ordre 1	164
Dérivées partielles d'ordre supérieur	165
Différentielle	166
11.4 Optimisation d'une fonction de 2 variables	168
Définitions	168
Existence d'un minimum et d'un maximum globaux	168
Condition nécessaire d'extrémum local	168
Condition suffisante d'extrémum local	168
<i>Mots clés</i>	169
<i>Exercices</i>	170
<i>Solutions</i>	172
12 Champs scalaires, champs vectoriels	181
12.1 Coordonnées non cartésiennes dans le plan et dans l'espace	181
Coordonnées polaires (dans le plan)	181
Coordonnées cylindriques (dans l'espace)	183
Coordonnées sphériques (dans l'espace)	184
12.2 Champs de vecteurs du plan ou de l'espace	185
Définition	185

Divergence d'un champ de vecteurs du plan ou de l'espace	186
Rotationnel d'un champ de vecteurs de l'espace	186
Expression de la divergence et du rotationnel en coordonnées non cartésiennes	187
Propriétés des opérateurs classiques	187
Théorème de Poincaré	188

12.3 Formes différentielles 188

Définitions 188

Propriétés 189

Mots clés 190

Exercices 190

Solutions 192

13 Intégrales multiples 198

13.1 Intégrales doubles 198

Intégrale d'une fonction continue sur un rectangle 198

Extension à une partie fermée bornée du plan 200

Changement de variables 201

13.2 Intégrales triples 201

Approche et calcul 201

Changement de variables 202

13.3 Applications 202

Interprétations d'une intégrale double ou triple 202

Moments et centres d'inertie 203

Mots clés 205

Exercices 205

Solutions 207

14 Intégrales curvilignes 214

14.1 Arc de courbe paramétré 214

Définition 214

Droite tangente et plan normal 215

Arc orienté 215

Longueur d'un arc de courbe paramétré 215

14.2 Intégrale curviligne 216

Intégrale curviligne d'une fonction 216

Circulation d'un champ de vecteurs le long
d'une courbe orientée 216

Intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe orientée	217
Propriétés de l'intégrale curviligne	217
Circulation d'un champ de gradients	218
Formule de Green - Riemann	219
<i>Mots clés</i>	219
<i>Exercices</i>	220
<i>Solutions</i>	222

15 **Intégrales de surface** **227**

15.1 Surface paramétrée	227
Définition	227
Plan tangent et droite normale	227
Aire d'une surface	228
15.2 Intégrale de surface	229
Intégrale de surface d'une fonction	229
Flux d'un champ de vecteurs	229
Formule de Stokes	230
Autre énoncé	230
Formule d'Ostrogradski	230
<i>Mots clés</i>	231
<i>Exercices</i>	231
<i>Solutions</i>	233

Index **241**