CHAPITRE 15

MOUVEMENTS PLANS – OSCILLATIONS

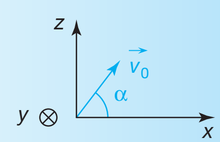
1 Lancement d'un projectile

1.1 Hypothèses d'étude

- **Référentiel** : référentiel terrestre galiléen.

- **Système** : projectile de masse m, lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ faisant un angle α avec le plan horizontal xOy et contenue dans le plan xOz (Fig. 1).

- **Forces extérieures** : le champ de pesanteur est supposé uniforme $\overrightarrow{g}$. Les frottements de l'air et la poussée d'Archimède sont négligeables.



Le repère O, x, y, z est lié à un référentiel terrestre galiléen.
Figure 1

1.2 Étude du mouvement

- **2e loi de Newton** : $m\overrightarrow{g_0} = m\overrightarrow{a_G} \Rightarrow \overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{g}$

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = -g.$$

Par intégration (avec les conditions initiales) :

$$\dot{x} = \text{cte} = v_0 \cos\alpha \qquad \dot{y} = \text{cte}' = 0 \qquad \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha$$

$$x = v_0 \cos\alpha\, t \qquad y = 0 \qquad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t.$$

- **Équation de la trajectoire** (Fig. 2) :

$$z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha \; .$$

Le mouvement du projectile est *dans le plan* xOz.
La trajectoire est une portion de *parabole*.

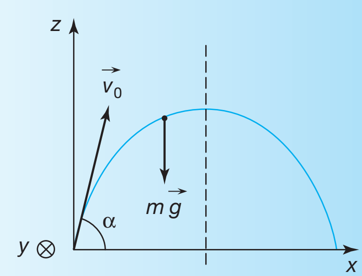


Figure 2

1.3 Mouvement dans un champ électrique uniforme

- **Nouvelles hypothèses d'étude** : une particule de masse m et de charge q est lancée avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans un plan xOz, région de l'espace où règne un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$ parallèle à Oz. On étudie son mouvement dans un référentiel galiléen. Son poids est négligeable devant la force électrique $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$.

- **Cas où $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{E}$ font un angle α quelconque** : l'étude est strictement identique à celle du **1.2**, la force constante $m\overrightarrow{g}$ étant remplacée par la force constante $q\overrightarrow{E}$. On retrouve une *parabole* orientée vers le haut ou vers le bas selon le signe de q.

La trajectoire se tourne dans le sens de $\overrightarrow{E}$ si $q > 0$.

- **Cas où $\overrightarrow{v_0}$ et $\overrightarrow{E}$ font un angle $\alpha = 90°$** : on parle de déflexion électrique. C'est le cas usuel des particules déviées dans un condensateur plan (oscilloscope).

Cf. Exercice 2.

2 Mouvements des planètes et des satellites

Préliminaires

Le *système solaire* correspond à une étoile, nommée Soleil, autour de laquelle tournent 8 planètes (Mercure, Vénus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune). Le Soleil n'est qu'une étoile moyenne parmi 10^{11} étoiles constituant notre *galaxie*, et il existe sans doute 10^{12} galaxies dans l'*univers.*

Les *longueurs* dans l'univers sont telles qu'on utilise souvent d'autres unités que le mètre. Citons l'*unité astronomique* qui correspond à la distance Terre-Soleil :

$$1 \text{ u.a.} = 1{,}50.10^{11} \text{ m},$$

ou *l'année lumière* qui correspond à la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année :

$$1 \text{ a.l} = 9{,}47.10^{15} \text{ m}.$$

2.1 Mouvements des planètes

- **Référentiel héliocentrique galiléen** : Copernic (Fig. 3) choisit pour origine le centre du Soleil et pour axes les directions de trois étoiles fixes α, β, γ. Les huit planètes du système solaire tournent autour du Soleil.

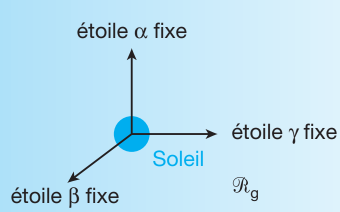
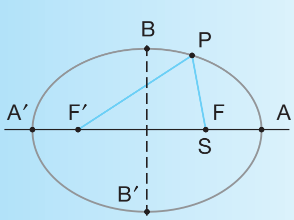


Figure 3

- **Les trois lois de Kepler**

– *1re loi : loi des trajectoires*

La trajectoire du centre d'une planète P est une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers F (Fig. 4).



ellipse
$A'A = 2a$ grand axe
$B'B = 2b$ petit axe
Une ellipse est l'ensemble des points P tels que $F'P + FP = 2a$.

Figure 4

– *2e loi : loi des aires*

Les planètes ne tournent pas à vitesse constante. Le segment de droite FP balaie des aires égales pendant des durées égales (Fig. 5).

– *3e loi : loi des périodes*

Pour toutes les planètes, le rapport entre le carré de la période de révolution et le cube du demi-grand axe est le même :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}}.$$

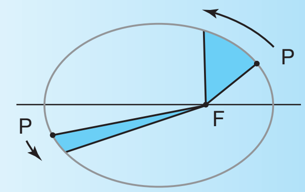


Figure 5

REMARQUE. – On suppose le Soleil fixe ($m_s \gg m_p$).

- **Approximation : mouvement circulaire uniforme**

En première approximation, on assimile la trajectoire du centre des planètes à un *cercle* (Fig. 6) de rayon *r* autour du Soleil. La seule force considérée est l'interaction gravitationnelle Soleil-planète :

$$-G\frac{m_s m_p}{r^2}\overrightarrow{u_{sp}} = m_p \overrightarrow{a_p}.$$

Dans le repère de Frénet : $\overrightarrow{u_{sp}} = -\overrightarrow{N}$

$$\boxed{\overrightarrow{a_p} = G\frac{m_s}{r^2}\overrightarrow{N}}.$$

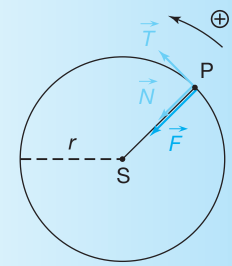


Figure 6

Une *accélération normale constante centripète* signifie une *vitesse constante* : mouvement circulaire uniforme :

$$\overrightarrow{a_p} = \frac{v^2}{r}\overrightarrow{N} \Rightarrow v = \boxed{\sqrt{\frac{Gm_s}{r}}}.$$

La période de révolution est donc :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{Gm_s}} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_s} = \text{cte}}.$$

On retrouve la 3e loi de Kepler.

2.2 Mouvements des satellites

- **Référentiel géocentrique**

Il a son origine au centre de la Terre T et trois axes fixes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique (il est donc en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique). On le considère comme galiléen (Fig. 7).

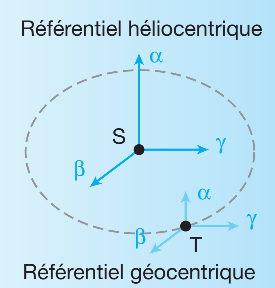


Figure 7

- **Trajectoire elliptique**

Les trois lois de Kepler s'appliquent de la même façon :

Soleil / Planète ⇔ Terre / Satellite

la seule force considérée étant l'interaction gravitationnelle Terre/Satellite.

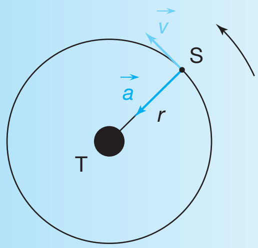


Figure 8

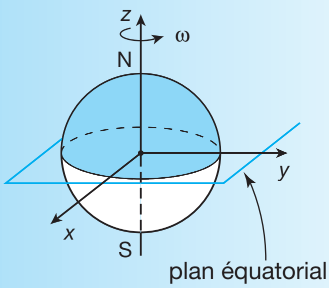


Figure 9

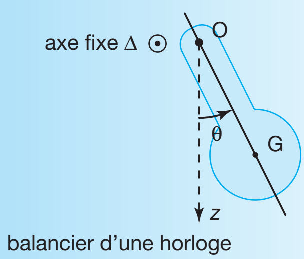


Figure 10

Il s'agit d'un *oscillateur en rotation*.

En pratique : $\theta_{max} < 10°$. Dans ce cas, il y a *isochronisme* des petites oscillations.

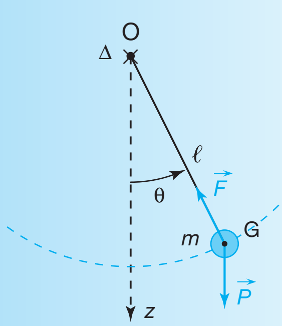


Figure 11

- **Approximation : mouvement circulaire uniforme**

En admettant une orbite circulaire de centre confondu avec le centre de la Terre (Fig. 8), on retrouve pour le centre d'inertie du satellite :

$$\boxed{\vec{a} = G\frac{m_T}{r^2}\vec{N}} \quad \text{et} \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{Gm_T}{r}}}, \quad \vec{v} = v\vec{T},$$

avec $r = R_T + h$, h (*altitude*).

La période de révolution vérifie : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{Gm_T}}$.

- **Satellite géostationnaire** : un tel satellite gravite dans le plan de l'équateur terrestre et tourne dans le même sens de rotation de la Terre avec une même période de révolution que la période de rotation de la Terre (Fig. 9). Un tel satellite est *immobile* vis-à-vis d'un observateur fixe sur Terre (référentiel terrestre).

Un jour sidéral (environ 24 h) $\Rightarrow$ $\boxed{T = 86\,184 \text{ s}}$.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{Gm_T}} \Rightarrow \boxed{h = 35\,800 \text{ km}}.$$

3 ▬ Oscillations d'un pendule

3.1 Pendule pesant

- **Définition** : tout système matériel ou solide pouvant osciller autour d'un axe horizontal fixe (O, Δ) ne passant pas par son centre d'inertie G (Fig. 10).

- **Oscillation** : c'est le trajet effectué par le pendule entre deux passages consécutifs à la même position et dans le même sens.

– On choisit souvent comme référence la *position d'équilibre stable* : G est situé sur la verticale O*z* issue de O, et au-dessous de l'axe de rotation.

– On caractérise alors la position du pendule à un instant *t* par son *abscisse angulaire* $\theta_{(t)}$.

- **Oscillations libres** : en l'absence de *frottements*, les oscillations sont dites *libres*. Un pendule, écarté de sa position d'équilibre d'un petit angle, et abandonné sans vitesse initiale, effectue des oscillations *périodiques*, de période propre T_0, indépendante de l'amplitude angulaire θ_{max}.

- **Oscillations amorties** : en présence de frottements, le pendule revient rapidement à sa position d'équilibre.

3.2 Modélisation : pendule simple

- **Définition** : un pendule simple est constitué d'une petite boule de masse *m*, suspendue à un fil inextensible de masse négligeable et de longueur ℓ (Fig. 11). Sa conception permet des frottements quasi négligeables.

Exercices incontournables

1. Mouvement d'une balle de golf

Une balle de golf, assimilable à un solide ponctuel M de masse m, est lancée d'un point O pris pour origine des espaces et du temps, dans le champ de pesanteur terrestre ($\vec{g}$ uniforme) avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale.

a) En supposant la force de frottement de l'air négligeable, établir l'équation de la trajectoire dans le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, défini par $\vec{v_0}$ et $\vec{g}$.

b) Déterminer la flèche H (hauteur du sommet S de la trajectoire) et la portée $OB = L$ (distance à laquelle la balle retombe sur le sol horizontal).

c) On suppose α variable. Déterminer la portée maximale L_{max} et la flèche maximale H_{max} en fonction de v_0 et g.

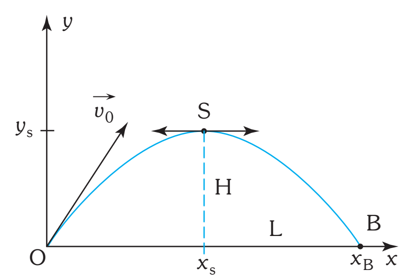


Figure 16

a) On utilise un *référentiel terrestre galiléen* $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (Fig. 16).

Le système étudié est la balle de golf qui n'est soumise qu'à son poids ; d'après la *2e loi de Newton* :

$$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}.$$

En projection sur Ox et Oy :

$$\ddot{x} = a_x = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{y} = a_y = -g.$$

Par intégration entre $t = 0$ et t :

$$\dot{x} = v_x = v_0 \cos\alpha \quad \text{et} \quad \dot{y} = v_y = -gt + v_0 \sin\alpha,$$

puis $\quad x = v_0 t \cos\alpha \quad \text{et} \quad y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha,$

on obtient l'équation de la trajectoire :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad \text{et} \quad \boxed{y = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x\tan\alpha}.$$

Il s'agit d'une parabole d'axe parallèle à Oy, coupant Ox en O et B.

b) • *Le sommet* S est atteint lorsque l'altitude est maximale :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_S = 0 = -\frac{gx_S}{v_0^2\cos^2\alpha} + \tan\alpha$$

$$x_S = \frac{v_0^2}{g}\cos\alpha\sin\alpha = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}.$$

Il en résulte : $y_S = H = -\dfrac{1}{2}\dfrac{gx_S^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + x_S\tan\alpha = \dfrac{1}{2}x_S\tan\alpha$

$$\boxed{y_S = H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}.$$

- *Le point de retombée* correspond à $x_B = L$ et $y_B = 0$.

$$0 = \left[-\frac{1}{2}\frac{g x_B}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha\right] x_B$$

soit $\boxed{x_B = L} = \dfrac{2 v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} = \boxed{\dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = 2 x_S}$.

c) • *La portée L* est maximale (v_0 fixée) si $\sin 2\alpha = 1$, soit $\alpha = 45°$:

$$\alpha = 45° \Rightarrow \boxed{L_{max} = \frac{v_0^2}{g}}.$$

- *La flèche H* est maximale (v_0 fixée) si $\sin^2 \alpha = 1$, soit $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ (tir vertical) :

$$\alpha = 90° \Rightarrow \boxed{H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}}.$$ On constate $L_{max} = 2H_{max}$.

2. Accélération et déviation électrique

Pour visualiser une tension sur l'écran d'un oscilloscope, il faut provoquer une déviation d'un faisceau d'électrons proportionnellement à cette tension. Ce faisceau d'électrons a été préalablement accéléré dans un canon à électrons. On modélise les phénomènes ainsi.

L'électron est une particule de masse m et de charge $q = -e$. Son poids est négligeable devant la force électrique.

1. Accélération électrique

Un électron pénètre dans une région où règne un champ électrique sur une longueur L. Sa vitesse d'entrée v_e supposée dirigée selon Ox et de sens inverse de $\vec{E}$ est assez faible pour pouvoir être négligée (Fig. 17).

a) Établir l'expression de $x(t)$ pour x variant de 0 à L, en supposant v_e négligeable.

b) Donner l'expression de la vitesse en sortie v_s.

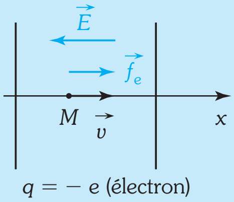


Figure 17

2. Déviation (ou déflexion) électrique

Un électron pénètre dans un condensateur plan soumis à une tension U créant ainsi un champ uniforme $E = \dfrac{U}{d}$ avec d distance entre les armatures (Fig. 18). Sa vitesse $\vec{v_0}$ est selon Ox, tandis que le champ électrique est selon $(-)$ Oy. À la sortie du condensateur de longueur ℓ, l'électron a une vitesse $\vec{v_\ell}$ et se dirige vers un écran dont la distance au centre du condensateur est D.

a) Déterminer les expressions de $x(t)$ et de $y(t)$, définissant le vecteur position de l'électron dans le condensateur plan.

b) Déduire l'équation de la trajectoire et la déviation y_ℓ en sortie du condensateur.

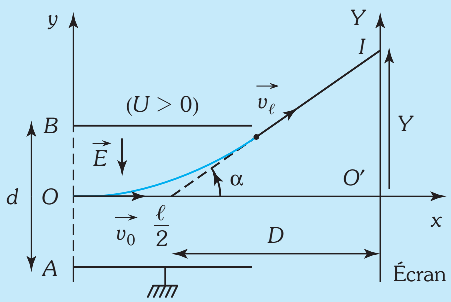


Figure 18

c) Justifier que la déviation Y sur l'écran sera de la forme : $Y = \frac{e}{m}\frac{\ell}{d}\frac{D}{v_0^2}U = kU$.

On admettra que la tangente à la trajectoire coupe l'axe Ox, en $x = \frac{\ell}{2}$.

1. Le système choisi est l'électron $(m, q = -e)$ et on l'étudie dans le repère xOz associé à un référentiel terrestre galiléen. Lorsque $t = 0$, l'électron est en $x = 0$.

a) La 2^e^ loi de Newton donne : $m\vec{a} = (-e)\vec{E} = (-e)(-E\vec{u_x}) = +eE\vec{u_x}$.

L'accélération est constante et selon $\vec{v_e}$, donc le mouvement est *rectiligne uniformément accéléré*.

Par projection sur Ox et intégration :

$$a = \ddot{x} = \frac{eE}{m} \Rightarrow v = \dot{x} = \frac{eE}{m}t + v_e \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 + v_e t.$$

Si l'on néglige v_e, on a plus simplement : $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2}$.

b) L'électron atteint la sortie lorsque $x = L$, donc après un temps T tel que $T = \sqrt{\frac{2mL}{eE}}$.

On en déduit la vitesse en sortie :

$$\boxed{v_s = \frac{eE}{m}T = \sqrt{\frac{2eEL}{m}}}.$$

2. Le système choisi est l'électron $(m, q = -e)$ et on l'étudie dans le repère xOy associé à un référentiel terrestre galiléen. Lorsque $t = 0$, l'électron est en $x = 0$.

a) La 2^e^ loi de Newton donne : $m\vec{a} = (-e)\vec{E} = (-e)(-E\vec{u_y}) = +eE\vec{u_y}$.

Par projection sur Ox puis sur Oy sachant que la vitesse initiale est selon Ox :

$$ma_x = 0 \Rightarrow v_x = \text{cte} = v_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t.$$

$$ma_y = eE \Rightarrow v_y = \frac{eE}{m}t \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2.$$

b) On élimine le temps entre les deux équations pour obtenir celle de la trajectoire :

$$y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.$$ C'est une portion de parabole.

À la sortie du condensateur ($x = \ell$), on obtient :

$$y_\ell = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{\ell}{v_0}\right)^2, \text{ avec } E = \frac{U}{d}.$$

c) Une fois sorti du condensateur, l'électron prend un mouvement rectiligne uniforme selon la tangente à la trajectoire. On déduit géométriquement :

$$\tan\alpha = \frac{Y}{D} = \frac{y_\ell}{\frac{\ell}{2}},$$

soit la déviation $Y = \frac{2}{\ell}y_\ell D = \boxed{\frac{e}{m}\frac{\ell}{d}\frac{D}{v_0^2}U = kU}$.

3. Soleil, Terre, Lune et Météosat

1. Le référentiel héliocentrique a pour origine S le centre d'inertie du Soleil et trois axes dirigés vers trois étoiles fixes. Dans ce référentiel, la Terre, assimilable à une sphère de centre T, de masse $m_T = 5{,}98.10^{24}$ kg et de rayon $R_T = 6\,380$ km, décrit une orbite quasi circulaire de centre S, de période $T_1 = 1$ an $= 365$ jours.

a) Déterminer le vecteur accélération de la Terre en fonction de G (constante de gravitation), m_S (masse du Soleil) et $R_1 = ST$. Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.

b) Déterminer l'expression de la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil en fonction de G, m_S et R_1, puis l'expression de la période de révolution T_1.

c) Calculer le rayon de l'orbite R_1 si la masse du soleil vaut $m_S = 1{,}98.10^{30}$ kg.

On rappelle la constante de gravitation $G = 6{,}67.10^{-11}$ u_{SI}.

2. Le référentiel géocentrique a pour origine T, le centre de la Terre, et pour axes des axes parallèles à ceux du référentiel héliocentrique. Dans ce référentiel, la Lune décrit une orbite circulaire autour de la Terre de rayon $R_2 = 383\,000$ km, et de période T_2.

a) Donner l'expression de la vitesse de rotation de la Lune autour de la Terre en fonction de G, m_T et R_2, puis en fonction de g_0 (intensité du champ de pesanteur terrestre assimilable au champ de gravitation au niveau du sol terrestre), R_T et R_2.

b) Donner l'expression de la période de révolution de la Lune en fonction de G, m_T et R_2, puis de g_0, R_T et R_2 et calculer sa valeur.

3. La Terre tourne en outre sur elle-même. Elle effectue une rotation complète autour de l'axe des pôles en un jour sidéral : $T_3 = 86\,164$ s. Un satellite de type Météosat est dit géostationnaire car il reste immobile par rapport à un référentiel terrestre.

a) Quels sont nécessairement sa position et son mouvement dans le référentiel géocentrique ?

b) Quelle est la relation entre son altitude h et G, m_T, R_T et T_3 ? En déduire h.

Les référentiels choisis successivement seront considérés comme galiléens.

1. a) *Notre système* d'étude est la Terre (corps à symétrie sphérique équivalent vu de l'extérieur à une masse ponctuelle m_T en son centre T) et le référentiel est le *référentiel héliocentrique*. La Terre est soumise à la seule force de gravitation (Fig. 19).

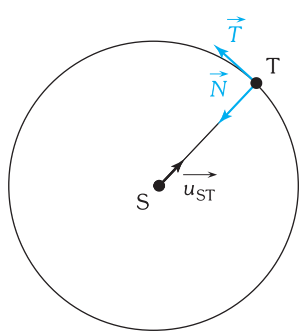


Figure 19

La seconde loi de Newton donne :

$$m_T\vec{a} = \vec{F} = -G\frac{m_T m_S}{R_1^2}\overrightarrow{u_{ST}} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{Gm_S}{R_1^2}\overrightarrow{u_{ST}}.$$

L'accélération est normale centripète. Dans le repère de Frénet $(\vec{T}, \vec{N})$:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{Gm_S}{R_1^2}\vec{N}}.$$

Comme pour un mouvement circulaire quelconque : $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_1}\vec{N}$,

on déduit $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$.

Le mouvement est *circulaire uniforme*.

b) Par identification : $v^2 = \frac{Gm_S}{R_1} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{Gm_S}{R_1}}}$.

On retrouve pour la période de révolution *la loi de Kepler* :

$$T_1 = \frac{2\pi R_1}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R_1^3}{Gm_S}}.$$

c) On déduit : $R_1 = \left(\frac{T_1^2}{4\pi^2}Gm_S\right)^{1/3} = \boxed{1{,}49.10^{11}\ \text{m}}$.

2. a) Le mouvement du satellite Lune autour de la Terre dans le *référentiel géocentrique* est identique au mouvement de la planète Terre autour du Soleil dans le référentiel héliocentrique.

La 2^e^ loi de Newton donne :

$$m_L\vec{a} = -\,G\frac{m_T m_L}{R_2^2}\overrightarrow{u_{TL}} \Rightarrow \vec{a} = \frac{Gm_T}{R_2^2}\overrightarrow{u_{TL}}.$$

Pour une masse ponctuelle au niveau du sol :

$$m\overrightarrow{g_0} = -\,G\frac{m\,m_T}{R_T^2}\vec{u} \Rightarrow g_0 = \frac{Gm_T}{R_T^2}.$$

Donc en valeur : $a = \frac{Gm_T}{R_2^2} = \frac{g_0 R_T^2}{R_2^2} = \frac{v^2}{R_2}$.

D'où : $\boxed{v = \sqrt{\frac{Gm_T}{R_2}} = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_2}}}$.

b) On déduit la période de révolution T_2 :

$$T_2 = \frac{2\pi R_2}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R_2^3}{Gm_T}} = \frac{2\pi}{R_T}\sqrt{\frac{R_2^3}{g_0}}.$$

L'application numérique donne : $\boxed{T_2 = 27{,}3\ \text{jours}}$.

3. a) *Un satellite géostationnaire* reste situé en permanence à la verticale d'un point de la surface de la Terre. Il est donc nécessairement dans le plan de l'équateur pour que son axe de rotation soit confondu avec l'axe des pôles et il a un *mouvement circulaire uniforme* (dans le même sens que la rotation propre de la Terre) de période égale à un jour sidéral (T_3).

b) $T_3 = \frac{2\pi R_3}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{Gm_T}}$ (d'après le **2.b)**).

On peut alors calculer $R_T + h$, puis h :

$$R_T + h = \left(\frac{T_3^2 Gm_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 42\,200\ \text{km} \Rightarrow \boxed{h = 35\,800\ \text{km}}.$$