PETITES HISTOIRES DES MATHÉMATIQUES

Jean-Pierre Escofier

PETITES HISTOIRES DES MATHÉMATIQUES

DUNOD
POCHE

Illustration de couverture : © Tofdru

Illustrations de l'intérieur : Rachid Maraï

NOUS NOUS ENGAGEONS EN FAVEUR DE L'ENVIRONNEMENT :

PAPIER CERTIFIÉ

Nos livres sont imprimés sur des papiers certifiés pour réduire notre impact sur l'environnement.

Le format de nos ouvrages est pensé afin d'optimiser l'utilisation du papier.

Depuis plus de 30 ans, nous imprimons 70 % de nos livres en France et 25 % en Europe et nous mettons tout en œuvre pour augmenter cet engagement auprès des imprimeurs français.

Nous limitons l'utilisation du plastique sur nos ouvrages (film sur les couvertures et les livres).

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
978-2-10-086703-5

Préambule

Voici une petite histoire des mathématiques écrite, du moins je l'espère, pour le plaisir de ceux et celles qui vont la lire, qu'ils ou elles les enseignent (en collège, en lycée...), les étudient ou désirent simplement en connaître un peu plus à leur sujet. Les mathématiques forment un monde un peu à part ; donner une idée de leurs résultats avec des mots simples et des images plus ou moins suggestives est plus difficile que pour d'autres sciences et il faut du temps ; un détour par leur histoire vaut parfois le voyage.

Les mathématiques se sont construites comme science bien avant toutes les autres, des millénaires contre quelques centaines d'années. Leurs résultats, même les plus anciens (ceux sur les nombres entiers ou les figures de la géométrie), sont toujours valables et, une fois établis par un cerveau, tout le monde peut les comprendre et les utiliser. Depuis toujours, elles s'occupent d'applications concrètes, elles étudient et généralisent les questions qui leur sont posées par la *Nature*, depuis toujours, elles approfondissent les questions internes qu'elles se découvrent ; depuis toujours, les réflexions les plus profondes et les moins susceptibles apparemment d'applications se révèlent porteuses de développements scientifiques féconds et permettent de mieux connaître notre monde. Les mathématicien(ne)s éprouvent un plaisir immense à leurs recherches, à jouir fortement de leurs découvertes et c'est le plus souvent pour l'éprouver qu'ils(elles) consacrent tant de temps aux mathématiques, pour arriver, au terme d'une concentration extrême, d'heures, de jours, de mois…, aux résultats importants qu'ils(elles) désirent. Ce plaisir est souvent difficile à imaginer pour qui n'est pas de leur monde, mais il n'est pas vraiment différent du plaisir de tous ceux et de toutes celles qui ont la chance de faire ce qui les intéresse et de pouvoir découvrir, construire, comprendre ou inventer des choses nouvelles. *Procreare jucundum*, *Créer est un plaisir*, disait Gauss, qui … *peut durer pendant plusieurs heures, voire plusieurs jours*, ajoutait Weil.

Depuis les années 1950-1960 (voir p. 277), les femmes ont commencé à participer aux mathématiques d'aujourd'hui[1]. Mais elles sont toujours bien moins nombreuses que les hommes, pour différentes raisons. Il ne faut pas oublier que leur possibilité d'accéder aux études scientifiques date tout au plus d'une centaine d'années.

Parler de l'histoire des mathématiques, c'est parler des mathématiques, mais j'aime bien donner des éléments d'ordre biographique, des anecdotes, etc. J'aurais aimé rester au niveau des connaissances mathématiques des collèges et des lycées pour que ce livre soit accessible au plus grand nombre, mais il m'aurait été difficile de donner une idée de ce que sont les mathématiques aujourd'hui. J'ai donc donné plus d'informations pour les années précédant 1650 où les techniques sont relativement simples, et des coups de projecteurs sur l'immense activité des siècles suivants en tentant de donner une légère idée de quelques résultats et en ayant des regrets très forts de n'avoir pas parlé de centaines de mathématiciens, de centaines de sujets, mais le volume de cette histoire ne pouvait être encore augmenté. Si un passage vous rebute, sautez-le ; j'espère cependant que vous y percevrez comme une musique mystérieuse…

Mon intérêt très ancien pour l'histoire des mathématiques s'est appuyé sur les travaux extrêmement nombreux et variés entrepris depuis la fin des années 1970 dans les IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, imaginés par l'association des professeurs de mathématiques en 1966, créés par Edgar Faure en 1968, imités partout dans le monde, mais aux moyens limités dans notre pays !). J'aimerais citer et remercier particulièrement :

– la commission Inter-IREM d'histoire et d'épistémologie des mathématiques, longtemps animée et présidée par Évelyne Barbin, puis par Dominique Tournès… et qui regroupe plus d'une centaine de membres de la France entière, passionnés, et dont les publications régulières depuis plus de trente ans forment un bel ensemble ;

– mes collègues Gérard Hamon, Loïc Le Corre (décédé en 2023) et Pascal Quinton (décédé en 2013) avec qui j'ai travaillé en harmonie à Rennes pendant de longues années ;

– Serge Cantat, Dominique Cerveau, Pierre Crépel, Alain Herreman, Emmanuël Houdart, Youri Kabanov, Marie-Françoise Roy, Jean-Pierre Verjus, Cédric Villani, Bachir Bekka et bien d'autres pour m'avoir aidé ou critiqué à un moment ou à un autre.

Je me souviens aussi du travail pionnier de Jean-Louis Ovaërt et Jean-Luc Verley qui ont dirigé les articles mathématiques de l'*Encyclopædia Universalis* et laissé inachevé un grand projet de livres mêlant histoire et mathématiques dont deux seulement furent publiés[2].

J'ai une pensée pour tous les étudiant(e)s (futurs enseignant(e)s de mathématiques pour une bonne part) et enseignant(e)s de l'académie de Rennes qui m'ont exprimé leur intérêt pour ce que je leur raconte (ce que personne d'autre ne fait, disent-ils souvent), pour l'éclairage que cela leur donne sur les mathématiques. C'est à eux que je dédie encore ce livre dans cette nouvelle version au format poche.

Mes remerciements vont également à Stéphane Leborgne et Simonne Peter qui ont bien voulu relire la version 2008 de ce livre et aux éditions Dunod, en particulier à Sarah Forveille et Anne Pompon avec laquelle les discussions sont toujours agréables et fructueuses.

Vous aurez peut-être des remarques, des objections à formuler, des erreurs à signaler. Merci de m'écrire : jean-pierre.escofier@univ-rennes1.fr.

1
Débuts

On peut tenter d'appréhender les connaissances mathématiques de nos ancêtres de la préhistoire par deux moyens très différents : d'une part, en étudiant les objets ou les peintures qu'ils nous ont laissés et, d'autre part, en étudiant les peuples autochtones actuels. Grâce aux fulgurants progrès des sciences cognitives durant ces dernières années, on commence aussi à comprendre ce qui se passe exactement au niveau des neurones de notre cerveau quand on pense à des notions mathématiques très simples.[1]

La Préhistoire

Que nous reste-t-il des temps préhistoriques ? Des squelettes, des pierres taillées en grand nombre, quelques grottes aux peintures admirables, des os entaillés, etc. On en retrouve régulièrement. Comment parler de *mathématiques* pour cette période reculée ? C'est ce qu'a tenté de faire Olivier Keller[2]. En étudiant, par exemple, l'évolution du travail de la pierre, du simple éclat obtenu en frappant le galet en son milieu aux sculptures sur pierre ou sur os qui apparaissent il y a plus de 30 000 ans, puis aux outils de grande finesse de la fin du néolithique, il observe une appréhension de plus en plus poussée des plans et des volumes[3].

Systèmes de numération

Les premières mathématiques sont aussi liées à la formation de l'idée de nombre, en observant des ensembles de personnes, d'animaux… Des comparaisons d'Olivier Keller entre des systèmes de dénomination des nombres entiers petits sont évocatrices de ce qu'a pu être une évolution de systèmes primitifs de base 5 (doigts-main) vers un système à base 10 (mains-pieds) ou à base 20 (mains-pieds-personnes, par exemple) où les nombres 1, 2, 3, 4 ont des dénominations particulières[4]. Les Zunis, par exemple, qui vivent au nord du Nouveau Mexique, n'ont pas de nom spécial pour les petits nombres et ne peuvent pas aller facilement au-delà de 10 : 1 = pris pour commencer, 2 = levé avec le précédent, 3 = le doigt qui divise également, 4 = tous les doigts levés sauf un, 5 = l'entaillé, 10 = tous les doigts ; alors que des Indiens du Paraguay peuvent aller jusqu'à 20 sans difficulté, ayant des mots spéciaux pour 1 et 2, puis 5 = une main, 6 = un autre ajouté, 10 = tous les doigts, 11= arrivé au pied, un, 20 = fini les pieds ; un système plus évolué se rencontre chez les Tamanac du Venezuela avec des mots spéciaux pour les nombres de 1 a 4, 5 = une main entière, 10 = les deux mains, 11 = un du pied, 15 = tout un pied, 20 = un Indien, ensuite on va chercher un copain, ce qui conduit à la base 20. Certains ne vont pas beaucoup plus loin : il n'y aurait rien à compter avec ; des Papous vont jusqu'à 500 en base 20, avec des noms de plus en plus longs. Notons des curiosités : les Yukis un peuple indien de Californie dont il ne reste que peu de représentants, comptaient avec les espaces entre les doigts, dans un système de base 8 ; des Népalais, des Africains comptent en base 12.

Les compétences numériques des Mundurukus

Les Mundurukus, membres d'une tribu amazonienne du Brésil étudiée récemment par Pierre Pica (né en 1951), et d'autres, ont un système de numération minimal. Ils comptent jusqu'à 4 ou 5 plus ou moins approximativement et soustraire 4 de 6 n'a pas vraiment de sens pour eux. Cependant, les enfants mundurukus et américains ont les mêmes résultats aux tests de comparaison de nombres de points (plusieurs dizaines) dans des images ou aux tests de géométrie. À partir des compétences qui seraient en chacun de nous, les Mundurukus auraient développé une appréhension de la *numérosité*, comme s'ils ne pensaient qu'en dizaine, quinzaine, vingtaine, mais n'avaient pas le minimum d'outils de langage pour calculer exactement.

Pour la base 20, il nous reste 80 ; Harpagon devait passer les six-vingts selon Frosine. On retrouve 20 dans 40, 60, 70 et 80 en breton. Les Mayas comptaient beaucoup en base 20 et envisageaient de grandes durées : 400 ans, 160 000 ans, et même 64 milliards (20 à la puissance 6) d'années !

Sciences cognitives

Avant 1990, les sciences cognitives travaillaient avec des tests variés. On demandait, par exemple, à des personnes d'appuyer sur un bouton ou un autre suivant que le nombre qu'on leur proposait était inférieur ou supérieur à 65 : le temps de réponse augmentait nettement quand on proposait des nombres proches de 65.

En 1990, l'imagerie par résonance magnétique fonctionnelle est mise au point. Complétée par des techniques plus anciennes, l'électro- et la magnétoencéphalographie, elle permet d'observer, de manière non invasive, par le traitement (les mathématiques sont ici essentielles) de variations très faibles de signaux, l'activité de neurones dans les différentes zones du cerveau. Les livres fascinants de Stanislas Dehaene (né en 1965) font le point sur les résultats fournis par ces méthodes[5]. On y apprend que les neurones des flancs du sillon intrapariétal du cerveau sont activés lors de toute activité où l'arithmétique intervient. Cela est vrai pour tout être humain, quelle que soit sa culture et cette localisation se retrouve chez les mammifères, particulièrement les chimpanzés et les bonobos. Dans le cerveau d'un être humain naissant, des neurones sont spécialisés pour le nombre 1, d'autres pour le nombre 2, d'autres pour le nombre 3. Très tôt, les bébés ont le sens de ces petits nombres ; ils savent aussi distinguer des séries de 4 et de 12 éléments. On sait aussi que des neurones actifs quand on parle de nombres plus grands (ou plus petits) sont aussi actifs quand on tourne les yeux à droite (ou à gauche). Les sciences cognitives sont aujourd'hui en plein développement. Pour le moment, on ne peut encore dire comment le cerveau appréhende les mathématiques et on n'imagine pas exactement ce dont sont capables nos près de cent milliards de neurones et toutes les connexions établies entre eux par les synapses. Le cerveau est d'une grande plasticité et des synapses se mettent sans cesse en place, particulièrement quand on répète le même type d'exercice régulièrement. Si vous voulez être bon en mathématiques, entraînez-vous tous les jours, ça paiera !

Le système sumérien de numération

La civilisation sumérienne qui se développe au troisième millénaire avant notre ère a produit des œuvres merveilleuses, aussi bien littéraires qu'artistiques. Les Sumériens écrivaient avec un *calame* (tige de roseau), dont l'extrémité était taillée, sur des tablettes d'argile fraîche qu'ils faisaient ensuite sécher au soleil et qui nous sont parvenues telles qu'elles avaient été écrites ou recopiées.

Les toutes premières tablettes[6], datées de –3300, marquent une étape cruciale de la naissance de l'écriture. L'étape précédente est celle des bulles-enveloppes, petites sphères d'argile dans lesquelles on plaçait des jetons et sur lesquelles on inscrivait quelques signes pour garder la trace d'un accord ; les premiers coups de génie ont été de supprimer les jetons, d'aplatir les bulles et de développer l'écriture. Les bulles-enveloppes comme les premières tablettes donnent des décomptes de bovins, béliers, brebis, agneaux et agnelles, etc. La naissance de l'écriture est ainsi liée à l'écriture de nombres ; elle ne note d'abord que quelques mots.

Les différents systèmes de mesure propres à chaque ville et à chaque domaine de mesure sont unifiés par le premier empire akkadien vers –2200, –2100 ; un système de numération en base 60 s'impose, réduit à deux signes qui suffisaient pour tout écrire, l'un en forme de clou, l'autre de chevron (figure 1.1), obtenus en appuyant

Figure 1.1. Le clou et le chevron des Sumériens.

différemment avec le calame sur la tablette. Le clou vaut donc 1 ou, plus généralement, 60^k, le chevron vaut 10 ou, plus généralement, 10×60^k, sans que rien ne permette souvent de connaître l'ordre de grandeur[7].

Écriture des nombres

Pour écrire 56, on écrira 5 chevrons suivis de 6 clous (les chevrons sont emboîtés, les clous regroupés par 3 si besoin). Pour écrire $6\,975 = 3\,600 + 56 \times 60 + 15$, on écrit un clou, puis 56, puis 15 (un chevron et 5 clous). Pour écrire $3\,615 = 3\,600 + 15$, on écrit un clou, puis 15 ; pour marquer l'absence de soixantaines, le scribe laisse parfois un espace entre le clou et 15, parfois non ; il faut deviner. Ce n'est que bien plus tard, vers –300, qu'apparaît dans des tablettes une notation de séparation jouant le rôle de notre zéro comme dans l'écriture de 2 016.

Les Babyloniens, des sémites, dominent le Moyen-Orient à partir de la fin du troisième millénaire, assimilant la culture des Sumériens. Les années –2000 à –1600 sont un âge d'or pour les mathématiques. Plusieurs centaines de tablettes retrouvées dans les fouilles en témoignent.

Le système en base 60 se diffuse chez les mathématicien(ne)s grecs dans les années –300 ; il sera transmis par les Arabes aux Européens et, si vous regardez votre montre en lisant ce livre, vous devriez avoir une pensée pour le, la ou les mathématicien(ne)s qui ont inventé ce système il y a plus de 4 000 ans.

Comment les Babyloniens s'y prenaient-ils pour effectuer leurs additions, multiplications, etc. On ne sait pas exactement. Il est probable qu'ils ne disposaient pas les nombres comme nous ; peut-être, comme dans le monde arabe plus tard, les écrivaient-ils sur le sable, obtenant un à un les chiffres du résultat en effaçant au fur et à mesure les chiffres des nombres initiaux dont ils n'avaient plus besoin.

Calculs d'inverses

Certaines tablettes donnent les inverses de nombres dits *réguliers* (dont les seuls diviseurs sont 2, 3, 5) ; l'inverse de 2 est 30 puisque $2 \times 30 = 1$ à un facteur 60 près ; de même, l'inverse de 3 est 20, l'inverse de 4 est 15. Les choses se compliquent un peu quand on doit calculer l'inverse de 9 ; on peut dire que c'est l'inverse du carré de 3, donc, à un facteur 60^2 près, $20^2 = 400 = 6 \times 60 + 40$. Ces tablettes étaient utilisées pour faire des divisions : au lieu de diviser par un nombre, on multipliait par son inverse donné par la table ; c'est pourquoi on trouve des tables de multiplication par $44\,26\,40 = (1/9)^2 = 1/81$: elles étaient destinées aux divisions par 81.

Le roi assyrien Assurbanipal (–685 à –631/–626) était très fier de ses connaissances mathématiques ; sur une stèle, il a fait graver : *Je peux résoudre des multiplications et des divisions complexes qui n'ont pas de solution facile*. Il avait réuni 20 000 tablettes dans la bibliothèque de Ninive.

Approximation de $\sqrt{2}$

La tablette YBC 7289 fait partie de la Yale Babylonian Collection. Sa provenance exacte est inconnue ; elle a été trouvée vers 1912 et daterait des années –1700 environ. Un carré de 5 centimètres de côté y est tracé (figure 1.2). Sont indiqués le côté du carré : 30 (ou 1/2, impossible de décider) et les valeurs 1 24 51 10, c'est-à-dire $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$, et sa moitié (ou son produit par 30) ; on vérifie que $1\ 24\ 51\ 10 = 1{,}414212963$ en notation décimale, valeur approchée par défaut à $6 \times 10^{-7} = 0{,}0000006$ près de $\sqrt{2}$; la seconde peut s'interpréter comme donnant la valeur de la diagonale du carré dessiné.

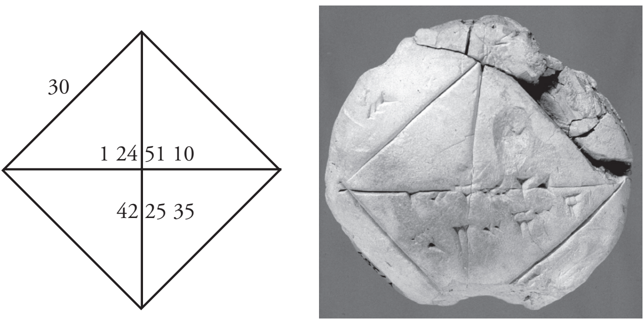

Figure 1.2. YBC 7289 : $\sqrt{2}$.

Cette belle approximation a été utilisée par Ptolémée, 2000 ans plus tard ; on n'avait pas encore fait mieux. On ne sait comment elle a été obtenue, mais elle correspond à une valeur donnée par l'algorithme de Héron : 577/408 (voir p. 43)[8].

Exemple de résolution babylonienne d'une équation du second degré

Quelques dizaines de tablettes babyloniennes donnent des résolutions d'équations du second degré sous forme d'exercices. Elles correspondent à la formule que nous apprenons tous par cœur aujourd'hui ; on peut donc dire que les Babyloniens savaient résoudre les équations du second degré.

Donnons un exemple d'une tablette très ancienne, la tablette BM 13901 du British Museum, qui propose un certain nombre de ces équations.

J'ai additionné 7 fois le côté de mon carré et 11 fois la surface : 6 15

Le problème posé correspond à l'équation : $11x^2 + 7x = 6{,}25$ $(15/60 = 1/4)$, équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 11$, $b = 7$, $c = -6{,}25$. La tablette conserve les indications du *professeur* à son *élève* (le calcul littéral correspondant est indiqué entre parenthèses) :

Tu multiplieras 11 par 6 15 : 1 8 45 (calcul de $-ac$) ;
Tu multiplieras 3 30 par 3 30 : 12 15 (calcul de $(b/2)^2$) ;
Tu l'ajouteras à 1.8.45 : 1 21 (calcul de $(b/2)^2 - ac$) ;
C'est le carré de : 9 (calcul de $\sqrt{(b/2)^2 - ac}$) ;
Tu soustrairas 3 30 : 5 30 (calcul de $\sqrt{(b/2)^2 - ac} - b/2$) ;
Que poser qui, multiplié par 11, donne 5 30 : 30 (calcul de $(\sqrt{(b/2)^2 - ac} - b/2)/a$) ;
Le côté du carré est 30 (autrement dit : 1/2).

Traduction-trahison

La traduction initiale de ce problème remonte à 1938. Même si je l'ai abrégée et simplifiée, elle nous laisse penser que les Babyloniens utilisaient notre langage algébrique actuel. Cette approche est maintenant réévaluée : en tenant compte du sens des mots utilisés, il semble que les Babyloniens raisonnaient sur des surfaces, des carrés, des rectangles, les ajoutant, les retranchant, les séparant en deux parties et associant à une longueur ℓ le rectangle de côtés 1 et ℓ.

Plimpton 322

La tablette Plimpton 322 est une tablette babylonienne de 12,7 sur 8,8 centimètres portant le numéro 322 dans la collection laissée à l'université Columbia de New-York par George Plimpton (1855-1936). Elle a probablement été trouvée à Larsa, au sud de l'Irak actuel. Elle daterait des années –1800 et a été victime d'une cassure à gauche (figure 1.3).

Figure 1.3. La tablette Plimpton 322.

c^2/b^2	a	c	n° de ligne
[1 59 00] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1*	2
[1 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1] 5[3] [1]0 29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	4
[1] 48 54 01 40	1 05	1 37	5
[1] 47 06 41 40	5 19	8 01	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
[1] 41 33 59 03 45*	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 01*	12 49	9
[1] 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 1	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1] 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
[1] 27 00 03 45	7 12 01*	4 49	13
[1] 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56*	53*	15

Figure 1.4. Les chiffres lisibles sur la tablette Plimpton 322.

Elle a été déchiffrée et analysée pour la première fois par Otto Neugebauer (1899-1990) et Abraham Sachs (1914-1983) en 1945[9].

Les titres des colonnes conduisent à considérer a et c comme un côté de l'angle droit et l'hypoténuse d'un triangle rectangle à côtés entiers. On peut vérifier (figure 1.4) pour 11 des 15 lignes (celles sans *) que le troisième côté de l'angle droit, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, est aussi entier. Par exemple, ligne 7, on a $a = 38 \times 60 + 11 = 2\,291$, $c = 59 \times 60 + 1 = 3\,541$ et $b = \sqrt{3\,541^2 - 2\,291^2} = 2\,700$. Les triplets (a, b, c) définissant un triangle rectangle à côté entiers

a, b, c, avec c pour l'hypoténuse, sont appelés *triplets pythagoriciens*. On peut corriger les nombres marqués d'une * dans les 5 lignes erronées, par exemple, le 9 01 de la ligne 9 doit être corrigé en 8 01 = 481. Les chiffres entre crochets ne sont plus visibles sur la tablette. La ligne 11 correspond au triangle $(3, 4, 5)$.

Comment les Babyloniens en étaient-ils arrivés là ? Différentes explications ont été avancées[10]. Neugebauer et Sachs pensaient qu'ils avaient trouvé d'une manière ou d'une autre que les triplets

$$a = k(m^2 - n^2), b = 2kmn, c = k(m^2 + n^2),$$

avec k, m et n entiers, sont pythagoriciens ; on peut imaginer, mais cela ne prouve rien, qu'une idée liée à la formule $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ peut le suggérer. Un argument renforcerait la thèse de Neugebauer et Sachs : la liste des triplets donnés par ces formules, avec les conditions m et n réguliers, premiers entre eux, inférieurs à 125 et le plus petit angle du triangle entre 32 et 45 degrés, est exactement celle de la tablette.

2
La Grèce antique

Le raisonnement mathématique fut fondé par les Grecs, le premier connu étant la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. De 300 avant notre ère aux environ de 600, la capitale intellectuelle du monde est Alexandrie. Vers –300, Euclide y rédige les Éléments, *un monument dont l'influence est encore ressentie de nos jours. Puis viennent Archimède, un génie, Apollonius de Pergé, qui a fait l'étude des coniques, Claude Ptolémée, un astronome dont les travaux vont s'imposer pendant quinze siècles, et bien d'autres.*

Thalès vers –600

Thalès (vers –624 à –547) est originaire de Milet à l'embouchure du Méandre sur la côte ouest de la Turquie actuelle. Aucun texte de lui ne nous est parvenu. Proclus (411-485), qui vécut 1000 ans après lui, indique qu'on lui attribuait les propositions suivantes : *Un diamètre partage un cercle en deux parties égales, Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, Les angles opposés par le sommet sont égaux*, et un cas d'égalité des triangles. En donnait-il des démonstrations ?

Alors, pourquoi nomme-t-on, en France, théorème de Thalès l'énoncé sur la proportionnalité des segments découpés par des parallèles sur deux droites ? Je croyais, comme beaucoup, à l'apparition du théorème dans des manuels du début des années 1880[1]. Mais mon collègue Alain Herreman a retrouvé des mentions antérieures du théorème, désigné par son nom actuel, comme celle de Cournot (1801-1877) en 1847[2], qui cite le théorème comme un résultat bien connu de ses lecteurs et marquant *le commencement de la géométrie et celui de toute science exacte*. Les Espagnols, les Russes font comme nous ; mais en Allemagne, on appelle théorème de Thalès, *Satz von Thales*, le théorème énonçant qu'un angle inscrit dans un demi-cercle est droit[3].

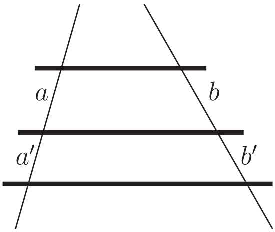

Figure 2.1. Théorème de Thalès : $a/a' = b/b'$

Vingt ans après Thalès, à Milet, Anaximandre est à l'origine de la naissance de la pensée scientifique, comme l'explique Carlo Rovelli dans son ouvrage *La Naissance de la pensée scientifique*.

Pythagore, irrationalité de $\sqrt{2}$

Pythagore (vers –570 à –495) serait né à Samos. Il est connu pour avoir fondé une école qui ressemble à une secte, entre la philosophie et la religion. Mais il n'aurait rien écrit et son activité scientifique n'est mentionnée pour la première fois que 400 ans après sa mort ! Ainsi, les seuls noms de mathématiciens connus de tous les élèves et de tous leurs professeurs, cités dans tous les livres, sont connus pour de mauvaises raisons : l'un a sans doute fait un peu de mathématiques et d'astronomie, mais pas ce que l'on croit ; l'autre n'aurait rien fait du tout !

Les élèves de Pythagore, les Pythagoriciens, soutenaient que tout dans la nature est nombre entier ou rapport de nombres entiers. Ils distinguaient les nombres pairs des nombres impairs et, parmi les nombres pairs, les nombres pairement pairs (multiples de 4), etc.

C'est probablement aux environs de −430 qu'un résultat inattendu est découvert : l'irrationalité de la racine de 2 (ou du rapport de la diagonale au côté d'un carré), c'est-à-dire l'impossibilité d'écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'un quotient p/q d'entiers. Tout n'était donc pas exprimable par des entiers ou des rapports d'entiers. Platon attribue cette découverte à Théodore de Cyrène dans son dialogue *Théétète* consacré à une définition de la science.

Démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$

Aristote disait qu'elle résultait de l'inégalité du pair et de l'impair, ce qui est obscur. Voici un exemple de ce qu'on pourrait comprendre. Si $\sqrt{2} = p/q$ avec p, q entiers, on a $p^2 = 2q^2$. Dans cette égalité, les puissances de 2 divisant les deux membres doivent être égales. Si la plus grande puissance de 2 divisant p est 2^r et si la plus grande puissance de 2 divisant q est 2^s, on doit donc avoir $2r = 2s + 1$, ce qui est impossible. C'est un résultat qui n'est pas visible sur une figure.

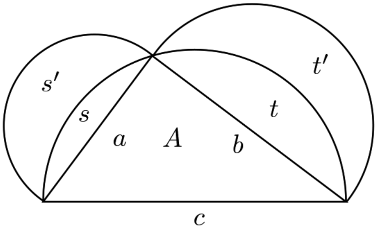

Figure 2.2. Lunules d'Hippocrate.

Les lunules d'Hippocrate

À la même époque, Hippocrate de Chio (–470 à –410) obtenait un résultat qui pouvait laisser espérer une réponse positive au problème de la quadrature du cercle. Ce problème célèbre aurait été abordé par Anaxagore de Clazomènes (vers –500 à –428) et consiste à construire à l'aide *seulement* d'une *règle* et d'un *compas* un carré de même aire qu'un cercle donné, autrement dit à construire un segment de longueur $\sqrt{\pi}$ (voir p. 190). En traçant un triangle rectangle dont les longueurs des côtés sont a, b, c (d'aire $A = ab/2$), puis les demi-cercles de diamètres les trois côtés, Hippocrate s'était aperçu que la somme des aires s' et t' des deux lunules de la figure valait A puisque $A + s + t = \pi c^2/8 = \pi(a^2 + b^2)/8 = s + s' + t + t'$.

Platon, Aristote, Eudoxe

Les Grecs ont fondé la philosophie (le mot viendrait de Pythagore, à qui l'on prête beaucoup, on l'a vu). Platon (–428 à –348) rencontre Socrate en –408 et devient son disciple. Il est frappé par sa condamnation par les Athéniens (Socrate est accusé, en particulier, de corrompre la jeunesse) à boire la ciguë, en –399. Vers –388, Platon prend l'habitude de se promener en philosophant avec ses disciples dans les jardins d'une villa ayant appartenu à un certain Akademos ; l'école qu'il fonde s'appellera donc Académie ; elle sera fermée par un édit de l'empereur Justinien (482-565), en 529. *Que nul n'entre ici s'il n'est apte à la géométrie*, autrement dit aux mathématiques, telle est la splendide maxime que Platon aurait fait placer à l'entrée de l'Académie ; mais elle n'est mentionnée que près de 1000 ans plus tard. Il voyage beaucoup, écrit une œuvre abondante sous forme de dialogues de Socrate avec diverses personnes dont certains touchent les mathématiques. Dans le *Timée*, Timée, philosophe pythagoricien contemporain de Socrate, expose devant lui une théorie de l'univers où l'argumentation est parfois curieuse pour nous aujourd'hui ; il associe les cinq polyèdres convexes et réguliers (appelés depuis polyèdres de Platon) à la liste des cinq éléments : terre et cube, feu et tétraèdre, air et octaèdre, eau et icosaèdre, éther et dodécaèdre (le dernier à être découvert sans doute).

Tentons de résumer. Pour Platon, l'âme serait immortelle et daterait du début de l'univers ; entre deux incarnations, elle serait en contact avec le monde du divin et des idées, aurait connaissance de tout, mais l'oublierait à chaque naissance ; elle pourrait retrouver les idées par réminiscence : devant un cercle concret, imparfait, elle se souviendrait de l'idée de cercle parfait ; les théorèmes existeraient quelque part et seraient à re-découvrir ; les raisonnements seraient conduits sur des figures imparfaites en ayant à l'esprit des figures parfaites. Les interrogations de Platon sur la nature des idées mathématiques trouvent encore des échos aujourd'hui. Certain(e)s pensent que les mathématiques (les nombres premiers, les groupes simples. . .) sont les mêmes sur la Terre et sur toute exoplanète d'une galaxie lointaine, voire avant le big bang