HEC ESCP-Europe 2010
Math. I

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2, et $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire et la norme associée sont notés respectivement $\langle .,. \rangle$ et $\|.\|$. Pour tous vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on note $x \geqslant y$ si pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $x_i \geqslant y_i$. Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est noté $\overrightarrow{0}$ et le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1 est noté $\overrightarrow{1}$.

On rappelle ou on admet les deux résultats suivants :

• une partie K non vide de $\mathbb{R}^n$ est convexe si pour tout couple (u, v) de vecteurs de K^2 et tout réel t de $[0, 1]$, le vecteur $tu + (1-t)v$ appartient à K ;
• l'image réciproque par une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

On dit qu'un vecteur h de $\mathbb{R}^n$ sépare deux convexes K_1 et K_2 s'il existe un réel c qui vérifie, pour tous vecteurs u de K_1 et v de K_2, l'encadrement $\langle h, u \rangle < c < \langle h, v \rangle$.

Si K est une partie non vide et convexe de $\mathbb{R}^n$, et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on appelle projection de x sur K et on note $p(x)$ s'il existe, tout vecteur y de K qui vérifie, pour tout vecteur z de K : $\|x - y\| \leqslant \|x - z\|$, c'est-à-dire tel que $\|x - y\| = \min\limits_{z \in K} \|x - z\|$.

Partie I. Projection sur un convexe fermé

1°) *Exemple 1.* Soit K le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$K = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2, z_1 \leqslant 1, z_2 \leqslant 1\}$$

et $x = (x_1, x_2)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à K tel que $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$.

a) Montrer que l'ensemble K est convexe et fermé. K est-il borné ?

b) Etablir l'existence et l'unicité de la projection $p(x)$ de x sur K. Déterminer cette projection.

c) Faire une figure représentant le convexe K, un vecteur x et la projection $p(x)$.

d) Ecrire une fontion Pascal d'en-tête `distance(x1,x2 :real) :real` qui à tout vecteur $x = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ n'appartenant pas à K et tel que $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, associe le réel $\|x - p(x)\|$.

e) Vérifier que pour tout vecteur z de K, on a $\langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leqslant 0$.

f) Montrer qu'il existe un réel c qui vérifie, pour tout vecteur z de K :

$$\langle x - p(x), z \rangle < c < \langle x - p(x), x \rangle$$

2°) *Exemple 2.* Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, différent de $\{\overrightarrow{0}\}$ et de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que E est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. On admet qu'elle est fermée.

b) Dans cette question, E est l'ensemble des vecteurs $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ de $\mathbb{R}^4$ qui vérifient l'équation $w_1 + w_2 - w_3 - w_4 = 0$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vecteur de $\mathbb{R}^4$ n'appartenant pas à E.
Déterminer $\min\limits_{w \in E} \|x - w\|$ et le vecteur $p(x)$.

Cas général : soit K une partie convexe, fermée et non vide de $\mathbb{R}^n$, et x un vecteur de $\mathbb{R}^n$ qui n'appartient pas à K.

3°) Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par : pour tout z de K, $f(z) = \|x - z\|$.

a) Justifier la continuité de la fonction f.

b) Soit z_0 un vecteur quelconque de K. On considère la boule fermée B_0 de centre x et de rayon $\|x - z_0\|$. On pose $K' = B_0 \cap K$. Justifier que K' est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^n$.

c) En déduire que f admet un minimum sur K'.
Soit $\widehat{z}$ tel que $f(\widehat{z}) = \min\limits_{z \in K'} f(z)$.

d) Montrer que l'inégalité $\|x - z\| \geqslant \|x - \widehat{z}\|$ est satisfaite pour tout vecteur z de K. Conclure.

4°) a) Vérifier pour tous vecteurs a et b de $\mathbb{R}^n$ l'identité :

$$\|x - \frac{a+b}{2}\|^2 + \frac{1}{4}\|a - b\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - a\|^2 + \|x - b\|^2)$$

b) On pose $d = \min\limits_{z \in K} \|x - z\|$. Soit u et v deux vecteurs de K vérifiant $d = \|x - u\| = \|x - v\|$. A l'aide de la question précédente, montrer que $u = v$. Conclure.

5°) On rappelle que $p(x)$ désigne la projection du vecteur x sur K.

a) Etablir, pour tout vecteur z de K et pour tout réel t de $[0, 1]$, l'inégalité :

$$\|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x - (tz + (1 - t)p(x)\|^2$$

b) En déduire pour tout z de K, l'inégalité : $\langle z - p(x), x - p(x)\rangle \leqslant 0$.

c) Réciproquement, on suppose qu'il existe un vecteur y de K tel que pour tout vecteur z de K, on a : $\langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0$. Montrer que $y = p(x)$. Conclure.

d) Etablir l'inégalité : $\langle x - p(x), p(x)\rangle < \langle x - p(x), x\rangle$. Montrer que $x - p(x)$ sépare les ensembles K et $\{x\}$.

Partie II. Un cas particulier

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, des réels strictement positifs. On pose :

$$K = \{z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 \leqslant 1\}$$

6°) Montrer que K est un sous-ensemble convexe, fermé et borné de $\mathbb{R}^n$.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ n'appartenant pas à K et vérifiant

pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $x_i > 0$.
On pose $K_0 = \{z \in K \ / \ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 = 1\}$ et $K_1 = \{z \in K \ / \ \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i z_i^2 < 1\}$

7°) Soit f la fonction à valeurs réelles définie sur K par $f(z) = \|x - z\|^2$.

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert K_1.

b) La restriction de f à K_1 admet-elle des points critiques ? En déduire que $p(x)$ appartient à K_0.

c) Montrer que les coordonnées de $p(x)$ sont positives ou nulles, non toutes nulles.

8°) On définit l'ouvert Ω par :
$\Omega = \{(z_1, \ldots, z_{n-1}) \ / \ \forall\, i \in [\![1, n-1]\!], z_i > 0$ et $(z_1, \ldots, z_{n-1}, 0) \in K_1\}$
Soit Ψ et H les fonctions à valeurs réelles définies sur Ω par :

$$\Psi(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \sqrt{\frac{1}{\alpha_n}\big(1 - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i z_i^2\big)}$$

et

$$H(z_1, \ldots, z_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - z_i)^2 + (x_n - \Psi(z_1, \ldots, z_{n-1}))^2$$

On suppose que $(z_1^*, \ldots, z_{n-1}^*)$ est un point critique de H.
On note $z_n^* = \psi(z_1^*, \ldots, z_{n-1}^*)$ et $z^* = (z_1^*, \ldots, z_{n-1}^*, z_n^*)$.

a) Montrer que z_n^* est strictement positif et que le vecteur z^* appartient à K_0.

b) On pose $\lambda = \dfrac{1}{\alpha_n}\big(\dfrac{x_n}{z_n*} - 1\big)$. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $z_i^* = \dfrac{x_i}{1 + \lambda\alpha_i}$.

c) On pose $\beta = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \big(-\dfrac{1}{\alpha_i}\big)$. Montrer que $\lambda > \beta$.

d) Etudier la fonction définie sur $]\beta, +\infty[$ par $y \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i x_i^2}{(1 + \alpha_i y)^2}$. En déduire l'existence d'un unique réel λ_0 vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i x_i^2}{(1 + \alpha_i \lambda_0)^2} = 1$. Montrer que λ_0 est strictement positif.
Expliciter les coordonnées du vecteur z^* en fonction de λ_0 et des réels α_i et x_i, pour $i \in [\![1, n]\!]$.

9°) a) Etablir, pour tout z de K, l'inégalité $\langle z - z^*, x - z^* \rangle \leqslant 0$. En déduire que $z^* = p(x)$.

b) Montrer que le réel $c = \dfrac{\lambda_0}{2}\big(1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\alpha_i x_i^2}{1 + \lambda_0 \alpha_i}\big)$ vérifie pour tout z de K : $\langle x - p(x), z \rangle < c < \langle x - p(x), x \rangle$.

Partie III. Une séparation de deux convexes

On admet la proposition suivante : si K_1 et K_2 sont deux convexes fermés de

$\mathbb{R}^n$ tels que $K_1 \cap K_2 = \{x_0\}$ ($x_0 \in \mathbb{R}^n$), alors il existe un vecteur h non nul de $\mathbb{R}^n$ et un réel c tels que, pour tout x de K_1, pour tout y de K_2, on a $\langle h, x\rangle \leqslant c \leqslant \langle h, y\rangle$.

On note $\mathcal{B}_n$ l'ensemble des parties K de $\mathbb{R}^n$ qui vérifient les trois conditions suivantes :

i) K est convexe, fermée, bornée et contenue dans $\{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant \overrightarrow{0}\}$;

ii) il existe un vecteur x de K dont toutes les coordonnées sont strictement positives ;

iii) pour tout x de K et tout y de $\mathbb{R}^n$, on a $[x \geqslant y \geqslant \overrightarrow{0}] \implies y \in K$.

10°) Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ un exemple d'élément K de $\mathcal{B}_2$.

Dans toute la suite de cette partie, on se donne un élément K de $\mathcal{B}_n$

11°) On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est *strictement concave* si, pour tout couple (a, b) de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ vérifiant $a < b$, pour tout réel t de $]0, 1[$, on a $f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b)$.

Montrer que la fonction $\ln$ est strictement concave.

12°) Soit g la fonction à valeurs réelles définie sur K par :

$$g(x) = g(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i.$$

a) Justifier que g admet un maximum sur K.

b) Soit u un vecteur de K tel que $g(u) = \max\limits_{x \in K} g(x)$. Montrer que pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $u_i > 0$.

c) Etablir l'unicité du vecteur u de K tel que $g(u) = \max\limits_{x \in K} g(x)$ (on pourra raisonner par contraposée et utiliser la question **11°)**).

13°) On note $\varphi^*(K) = (\varphi_1^*(K), \varphi_2^*(K), \ldots, \varphi_n^*(K))$ l'unique vecteur de K en lequel la fonction g atteint son maximum.

On pose $F = \left\{ \left(\dfrac{x_1}{\varphi_1^*(K)}, \ldots, \dfrac{x_n}{\varphi_n^*(K)} \right) \in \mathbb{R}^n, (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K \right\}$

a) Montrer que F est un élément de $\mathcal{B}_n$.

b) Montrer que pour tout vecteur y de F, on a $\prod\limits_{i=1}^{n} y_i \leqslant 1$.

14°) On pose $A = \{x \in \mathbb{R}^n, x \geqslant \overrightarrow{0}$ et $\prod\limits_{i=}^{n} x_i \geqslant 1\}$.

a) Montrer que A est fermé.

b) En utilisant la question **11°)**, montrer que A est convexe.

15°) Etablir l'égalité $A \cap F = \{\overrightarrow{1}\}$. En déduire l'existence d'un vecteur non nul h de $\mathbb{R}^n$ vérifiant, pour tout x de A et tout y de F : $\langle h, y\rangle \leqslant \langle h, \overrightarrow{1}\rangle \leqslant \langle h, x\rangle$.

16°) On veut montrer dans cette question que les coordonnées de h sont toutes strictement positives.

a) On fait l'hypothèse selon laquelle $\overrightarrow{0} \geqslant h$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on pose $v_k = \langle h, k\overrightarrow{1}\rangle$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} v_k = -\infty$. En déduire que l'hypothèse faite est contredite et qu'il existe donc un entier i_0 de $[\![1,n]\!]$ tel que $h_{i_0} > 0$.

b) On suppose qu'il existe un entier i_1 de $[\![1,n]\!]$ tel que $h_{i_1} \leqslant 0$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note $w^{(k)}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par $w_{i_0}^{(k)} = \dfrac{1}{k}$, $w_{i_1}^{(k)} = k$ et, pour tout i de $[\![1,n]\!]$ avec $i \neq i_0$ et $i \neq i_1$, $w_i^{(k)} = 1$.
Soit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $z_k = \langle h, w^{(k)}\rangle$.
Etudier la convergence de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$. En déduire que l'hypothèse faite est contredite et qu'en conséquence, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a $h_i > 0$.

17°) En utilisant un raisonnement semblable à celui des questions précédentes, montrer que toutes les coordonnées du vecteur h sont égales. En déduire que pour tout x de A et tout y de F, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \leqslant n \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Partie IV. La solution de Nash

Un élément K de $\mathcal{B}_n$ est interprété comme un problème de négociation. Les éléments de K représentent différents accords auxquels sont susceptibles d'aboutir n personnes. Pour x dans K, x_i est une mesure du «gain» de la personne i. Le statu quo en cas de désaccord est le vecteur nul.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on note $x[i,j]$ le vecteur déduit de x en échangeant les coordonnées de rangs i et j : $x[i,j]_i = x_j$, $x[i,j]_j = x_i$ et $x[i,j]_k = x_k$ si $k \notin \{i,j\}$.
Pour $K \subset \mathbb{R}^n$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on note $K[i,j]$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^n \;/\; x[i,j] \in K\}$.

Pour $(a,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on note $a \otimes x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur $(ax_1, \ldots, a_nx_n)$. Pour $a \in \mathbb{R}^n, K \subset \mathbb{R}^n$, on note $a \otimes K$ l'ensemble $\{a \otimes x, x \in K\}$.
Une règle de partage est une application $\varphi : \mathcal{B}_n \to \mathbb{R}^n$ qui asocie à tout problème de négociation K de $\mathcal{B}_n$, un vecteur $\varphi(K)$ de $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse aux règles φ qui vérifient les propriétés suivantes :

P1 : pour tout $K \in \mathcal{B}_n$, $\varphi(K) \in K$ et il n'existe pas de point $x \in K$ tel que $x \neq \varphi(K)$ et $x \geqslant \varphi(K)$.

P2 : pour tout $K \in \mathcal{B}_n$, et $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_i > 0$ pour tout i de $[\![1,n]\!]$, on a $\varphi(a \otimes K) = a \otimes \varphi(K)$.

P3 : pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et $K' \in \mathcal{B}_n$ tels que $K \subset K'$ et $\varphi(K') \in K$, on a $\varphi(K') = \varphi(K)$.

P4 : Pour tout $K \in \mathcal{B}_n$ et pour tout couple (i,j) d'entiers distincts de $[\![1,n]\!]$, on a $\varphi(K[i,j]) = (\varphi(K))[i,j]$.

18°) Les quatre propriétés P1, P2, P3, et P4 ont chacune une interprétation en terme de symétrie, ou d'optimalité, ou d'invariance par changement d'échelle ou d'invariance par élimination d'options non pertinentes (dans le désordre).

Quelle interprétation peut-on associer à chacune d'elles ? Justifier très brièvement votre réponse.

19°) Montrer que φ^*, définie dans la question **13°)**, vérifie les propriétés P1, P2, P3 et P4.

20°) Soit φ une règle satisfaisant à P1, P2, P3 et P4.

a) On pose $K_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x \geqslant \overrightarrow{0} \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant n\}$. A l'aide de P1 et P4, montrer que $\varphi(K_0) = \overrightarrow{1}$.

b) Soit K un élément de $\mathcal{B}_n$. On considère l'ensemble F défini dans la question **13°)**. A l'aide de P3 et de la question **17°)**, montrer que $\varphi(F) = \overrightarrow{1}$. En déduire que $\varphi(K) = \varphi^*(K)$. Conclure.

Solution

Partie I

Question 1.

a) $\star$ Soit $z = (z_1, z_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ deux points de K, t un scalaire de $[0,1]$ et $v = (v_1, v_2) = tz + (1-t)w = (tz_1 + (1-t)w_1, tz_2 + (1-t)w_2)$.

On a $[z_1 \leqslant 1 \text{ et } t \geqslant 0] \implies tz_1 \leqslant t$ et $[w_1 \leqslant 1 \text{ et } 1-t \geqslant 0] \implies (1-t)w_1 \leqslant 1-t$ et en sommant $tz_1 + (1-t)z_2 \leqslant t + 1 - t = 1$.

On procède de même pour l'autre coordonnée et donc $tz + (1-t)w \in K$, ce qui prouve que K est convexe.

$\star$ $]-\infty, 1] \times \mathbb{R}$ (respectivement $\mathbb{R}\times\,]-\infty, 1]$) est un fermé de $\mathbb{R}^2$, comme image réciproque de l'intervalle fermé $]-\infty, 1]$ par l'application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto x$ (respectivement $(x, y) \mapsto y$).
K est ainsi l'intersection de deux fermés, donc est fermé.

$\star$ K contient le vecteur $(-n, 1)$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et ce vecteur a pour norme $\sqrt{1+n^2} > n$, donc K contient des vecteurs de norme arbitrairement grande et K n'est pas borné.

b) Soit $x = (x_1, x_2)$. On cherche à minimiser $(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2$, sous la contrainte $[z_1 \leqslant 1 \text{ et } z_2 \leqslant 1]$.

$\star$ Si $x_1 \geqslant 1$ et $x_2 \geqslant 1$, alors $\forall\, z = (z_1, z_2) \in K$, on a $x_1 - z_1 \geqslant x_1 - 1 \geqslant 0$, donc $(x_1 - z_1)^2 \geqslant (x_1 - 1)^2$ avec égalité seulement pour $z_1 = 1$ et de même $(x_2 - z_2)^2 \geqslant (x_2 - 1)^2$, avec égalité seulement pour $z_2 = 1$.

Ainsi le minimum de $\|x - z\|^2$ vaut $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2$, atteint seulement pour $z = (1, 1)$.

$\star$ Si $x_1 \geqslant 1$ et $0 < x_2 < 1$, alors on a encore $(x_1 - z_1)^2 \geqslant (x_1 - 1)^2$, avec égalité seulement pour $z_1 = 1$, mais maintenant on peut réaliser $(x_2 - z_2)^2 = 0$ en prenant $z_2 = x_2$ et on ne peut pas faire mieux que 0 !

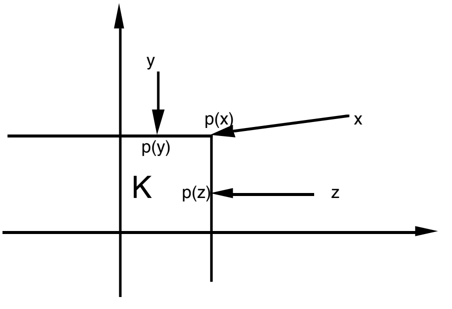
Ainsi le minimum de $\|x - z\|^2$ vaut $(x_1 - 1)^2$, atteint seulement pour $z = (1, x_2)$.

$\star$ Si $x_2 \geqslant 1$ et $0 < x_1 < 1$, on obtient de façon symétrique : le minimum de $\|x-z\|^2$ vaut $(x_2-1)^2$, atteint seulement pour $z=(x_1,1)$.

En résumé :

$$\begin{cases} (x_1,x_2) \geqslant (1,1) & \Longrightarrow \quad p(x)=(1,1) \\ x_1 \geqslant 1; 0 < x_2 < 1 & \Longrightarrow \quad p(x)=(1,x_2) \\ 0 < x_1 < 1; x_2 \geqslant 1 & \Longrightarrow \quad p(x)=(x_1,1) \end{cases}$$

c)



d)
```
function distance (x1, x2 : real) : real ;
Begin
if x1 >= 1 and x2 >= 1 then
distance := sqrt((x1-1)*(x1-1)+(x2-1)*(x2-1))
if x2 < 1 and x1 >= 1 then distance := x1-1
if x1 < 1 and x2 >= 1 then distance := x2-1
end ;
```

e) $\star$ Si $x_1 \geqslant 1$ et $x_2 \geqslant 1$, alors $p(x)=(1,1)$ et

$$\begin{aligned}\langle z-p(x), x-p(x)\rangle &= \langle (z_1-1, z_2-1), (x_1-1, (x_2-1)\rangle \\ &= (z_1-1)(x_1-1)+(z_2-1)(x_2-1) \leqslant 0,\end{aligned}$$

(car $z_1 \leqslant 1$ et $z_2 \leqslant 1$, tandis que $x_1-1 \geqslant 0$ et $x_2-1 \geqslant 0$.)

$\star$ Si $x_1 < 1$ et $x_2 \geqslant 1$, alors $p(x)=(x_1,1)$ et

$$\begin{aligned}\langle z-p(x), x-p(x)\rangle &= \langle (z_1-x_1, z_2-1), (0, x_2-1), \rangle \\ &= (z_1-x_1)\times 0+(z_2-1)(x_2-1) \leqslant 0\end{aligned}$$

$\star$ Si $x_2 < 1$ et $x_1 \geqslant 1$, alors $p(x)=(1,x_2)$ et

$$\begin{aligned}\langle z-p(x), x-p(x)\rangle &= \langle (z_1-1, z_2-x_2), (x_1-1, 0)\rangle \\ &= (z_1-1)(x_1-1)+(z_2-x_2)\times 0 \leqslant 0.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{\forall\, z \in K, \langle z-p(x), x-p(x)\rangle \leqslant 0}$$

f) Soit z quelconque dans K.

$\langle x-p(x), z\rangle = \langle x-p(x), z-p(x)\rangle + \langle x-p(x), p(x)\rangle$

et comme $\langle z-p(x), x-p(x)\rangle \leqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\langle x-p(x), z\rangle &\leqslant \langle x-p(x), p(x)\rangle = \langle x-p(x), x\rangle - \langle x-p(x), x-p(x)\rangle \\ &\leqslant \langle x-p(x), x\rangle - \|x-p(x)\|^2 \\ &\leqslant \langle x-p(x), x\rangle - \frac{1}{2}\|x-p(x)\|^2 - \frac{1}{2}\|x-p(x)\|^2\end{aligned}$$

Mais comme $x \notin K$, on a $\|x-p(x)\|^2 > 0$ et en posant, par exemple :

$$c = \langle x-p(x), x\rangle - \frac{1}{2}\|x-p(x)\|^2 < \langle x-p(x), x\rangle$$

on a bien :

$$\boxed{\forall\, z \in K, \langle x-p(x), z\rangle < c < \langle x-p(x), x\rangle}$$

Question 2.

a) Soit $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Comme E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on a $\lambda x + \mu y \in E$. Ceci est vrai en particulier si $\lambda \in [0,1]$ et $\mu = 1-\lambda$, ce qui prouve que :

$$\boxed{E\text{, qui est non vide, est une partie convexe de } \mathbb{R}^n}$$

b) $\star$ Ici E est l'hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'équation $w_1 + w_2 - w_3 - w_4 = 0$, donc formé des vecteurs orthogonaux au vecteur $v = (1, 1, -1, -1)$.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, on sait que $p(x)$ est le projeté orthogonal de x sur E, ce vecteur $p(x) = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ étant défini par les deux conditions :

$\to$ $p(x) - x$ est orthogonal à E, donc colinéaire à v : $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}, p(x) = x + \lambda v$, *i.e.*

$$p_1 = x_1 + \lambda, p_2 = x_2 + \lambda, p_3 = x_3 - \lambda, p_4 = x_4 - \lambda$$

$\to$ $p(x) \in E$, donc $p_1 + p_2 - p_3 - p_4 = 0$, *i.e.* $4\lambda + x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$

Donc $\lambda = -\dfrac{1}{4}(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$ et :

$$\boxed{p(x) = (x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{x_1 + x_2 - x_3 - x_4}{4}(1, 1, -1, -1)}$$

On peut si on veut écrire alors $p(x)$ coordonnée par coordonnée ...

$\star$ Enfin, $\min\limits_{w \in E} \|x - w\| = \|x - p(x)\| = \|\lambda v\| = |\lambda| \times \|v\| = 2|\lambda|$, soit :

$$\boxed{\min_{w \in E} \|x - w\| = \frac{1}{2}|x_1 + x_2 - x_3 - x_4|}$$

Question 3.

a) La fonction f est la composée de l'application $z \mapsto \sum (x_i - z_i)^2$ qui est polynomiale à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et de la fonction racine, qui est continue sur $\mathbb{R}^+$, donc :

$$\boxed{f \text{ est continue sur } K}$$

b) K est fermé, B_0 aussi, donc K' est fermé comme intersection de deux fermés et est non vide, puisqu'il contient z_0. Enfin $K' \subset B_0$ donc K' est borné.

$$\boxed{K' \text{ est fermé borné}}$$

c) f est continue et K' est fermé borné non vide, on sait alors que $f(K')$ est une partie fermée bornée et non vide de $\mathbb{R}$. En particulier $f(K')$ a un plus petit élément, ce qui veut dire que :

$$\boxed{f \text{ admet un minimum sur } K'.}$$

d) Soit $z \in K$. Deux cas se présentent :

$\star$ Si $z \in K' = K \cap B_0$, alors par définition de $\widehat{z}$ on a $\|x - z\| \geqslant \|x - \widehat{z}\|$.