Exercice 1 : une série de Fourier

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, vérifiant pour tout réel $x \in]0,1[$, $f(x) = 1$ et $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Représenter graphiquement la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis déterminer la série de Fourier de la fonction f.

2. Justifier l'existence des sommes suivantes et utiliser la question précédente, en énonçant les théorèmes utilisés, pour donner leur valeur

$$\text{(a)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{(b)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Exercice 2 : un système différentiel

On considère le système différentiel de fonctions inconnues x, y et de variable $t \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice A et en déduire que la matrice $B = A - 2I_2$ est nilpotente. En utilisant sans démonstration l'égalité $e^{tA} = e^{2t}e^{t(A-2I_2)}$, valable pour tout réel t, donner l'expression de la matrice e^{tA}.

2. En utilisant ce qui précède, ou à l'aide de toute autre méthode, trouver la solution du système différentiel vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$.

Problème : séries de Taylor et développement en série entière

Dans ce problème, toutes les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1,1[$, l'existence de $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ et donner sa valeur.

2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$

Démontrer que pour tout réel $x \in]0,+\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste de Laplace (ou reste intégral) : si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l , alors pour tout réel $x \in I$ et pour tout entier naturel n, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

ON RAPPELLE LE THÉORÈME SUIVANT :

Si une fonction f admet un développement en série entière sur l'intervalle $]-a,a[$, alors :

- la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-a,a[$,

- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine :

$$\forall x \in]-a,a[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

I. Quelques exemples d'utilisation de ce théorème

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0) = 1 \text{ et pour tout réel } x \neq 0, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 et vérifiant, pour tout entier naturel n, l'égalité $f(n)(0) = n.n!$

6. Un théorème des moments.

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R,R[$ avec $R > 1$,

$$\forall x \in]-R,R[, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On suppose, que pour tout entier naturel n, $\int_0^1 f(x)x^n dx = 0.$

L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R,R[$.

(a) Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,1]$.

(b) A l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0,1]$.

(c) Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R,R[$.

II. Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
pour tout réel $x\neq 0, f(x)=\exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$ et $f(0)=0$.

(a) Donner, à l'aide de la calculatrice (sans étude), l'allure de la courbe de la fonction f.

(b) Par les théorèmes généraux, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que, pour tout $x\in\,]0,+\infty[, f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{x^{3n}}\exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$.

(c) Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,+\infty[$ avec pour tout entier naturel $n, f^{(n)}(0)=0$.

Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(d) La fonction f est -elle développable en série entière sur un intervalle $]-r,r[$.

9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul. Pour tout x réel, on pose : $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{1+tx^2}dt$.

(a) Justifier que, pour tout réel x, la fonction $t\mapsto\dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est bien intégrable sur $[0,+\infty[$, puis démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On admettra que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

(b) Pour $t \in]0, +\infty[$ calculer, au moyen d'une série entière, les dérivées successives en zéro de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

(c) Quel est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

La fonction f est-elle développable en série entière à l'origine ?

III. Condition suffisante

On se propose, dans cette partie, d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. Soient a un réel strictement positif et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-a, a[$.

On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout réel $x \in]-a, a[$ et pour tout entier naturel n, $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$.

(a) Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.

(b) Donner un exemple simple de fonction pour laquelle ce résultat s'applique.

Solution

EXERCICE 1

1. Le dessin est laissé au lecteur. La fonction f étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$.

$\forall n \in \mathbb{N}^\star, b_n(f) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = \dfrac{2}{\pi}\Big[-\dfrac{\cos(nt)}{n}\Big]_0^\pi = \dfrac{2}{n\pi}(1-(-1)^n)$.

Donc : $\forall k \in \mathbb{N}, b_{2k}(f) = 0$ et $b_{2k+1}(f) = \dfrac{4}{\pi(2k+1)}$.

2. (a) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, d'après le théorème de Dirichlet, sa série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R}$ de

somme $\widetilde{f} : x \mapsto \dfrac{1}{2} \lim\limits_{h \to 0^+} \Big(f(x+h) + f(x-h) \Big)$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \widetilde{f}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n(f) \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$.

En particulier $\widetilde{f}\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big) = 1 = \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

(b) La fonction f étant continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, impaire et 2π-périodique, on déduit du théorème de Parseval que : $\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)^2$.

Donc $1 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2k+1)^2}$. *i.e.* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

EXERCICE 2

1. $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A) + \det(A) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$.
D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ *i.e.* $B^2 = (A - 2I_2)^2 = 0$.
La matrice B est donc nilpotente.
$A = 2I_2 + B$. Comme B et I_2 commutent, $e^{tA} = e^{2I_2} e^{tB} = e^{2t} e^{tB}$.
Comme, $B^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$, on a $e^{tB} = I_2 + tB = (1-2t)I_2 + tA$.
Donc $e^{tA} = e^{2t} e^{tB} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}$.
2. Le système différentiel linéaire homogène s'écrivant $X' = AX$, la résolution donne : $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} X(0)$.
Comme $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, on a $X(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Donc : $\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = e^{2t}(1-3t) \\ y(t) = e^{2t}(2+3t) \end{cases}$.

PROBLÈME

Partie préliminaire

1. La série géométrique $\sum x^n$ converge si $|x| < 1$ de somme $\dfrac{1}{1-x}$.

Donc $\forall x \in]-1, 1[, \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Du théorème de dérivation des séries entières on déduit que
$\forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{(1-x)^2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

2. Par intégration par parties, si $0 < a < b$,
$\displaystyle\int_a^b e^{-t}t^x dt = \Big[-t^x e^{-t}\Big]_a^b + \int_a^b e^{-t}t^{x-1}dt$.
$\lim\limits_{t\to 0^+} t^x e^{-t} = 0$ car $x > 0$; $\lim\limits_{t\to+\infty} t^x e^{-t} = 0$ par croissances comparées, par passage à la limite, on déduit de l'égalité précédente : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Par récurrence, on en déduit $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \Gamma(n) = (n-1)!$.

3. Prouvons le théorème par récurrence.
$\displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)dt = \int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$. Le résultat est vrai si $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que, pour tout $x \in I$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \qquad (\star).$$
Comme $f \in \mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$, par intégration par parties, en posant
$R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$, on obtient :
$R_n(x) = \Big[\dfrac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1)}(t)\Big]_a^x + \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$
i.e. $R_n(x) = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + R_{n+1}(x)$.
On déduit de $(\star)$: $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$.
D'où l'égalité vraie au rang $n+1$. On conclut avec le théorème de récurrence.

Partie I

4. $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$.
f étant somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

5. On déduit de la question 1. du préliminaire que :
$\forall x \in]-1,1[, \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.
La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(1-x)^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ comme fonction rationnelle. On déduit du théorème rappelé que $f^{(n)}(0) = n\,n!$

6. (a) Soit $u_n(x) = f(x)\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ pour $x \in [0,1]$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ avec $R>1$, elle est continue sur $[0,1]$, donc y est bornée.

$\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leqslant \|f\|_\infty^{[0,1]} \dfrac{|f^{(n)}(0)|}{n!} = \lambda_n$.

λ_n est indépendant de x et $\sum \lambda_n$ converge car la série entière $\sum \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge absolument au point $1 \in]-R,R[$. Donc $\sum u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

(b) On déduit alors du théorème d'intégration des séries de fonctions continues sur un segment que :

$$\int_0^1 (f(x))^2 dx = \int_0^1 \Big(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\Big)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)dx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \int_0^1 f(x)x^n dx = 0.$$

Comme f est continue sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 f^2 = 0$, on a $f(x) = 0$ si $x \in [0,1]$.

(c) Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ avec $R>1$, il s'en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$. Le théorème rappelé implique la nullité de f sur $]-R,R[$.

Partie II

7. Si $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in]-1,1[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

f ne coïncide avec la somme de son DSE que sur $]-1,1[$ puisque le rayon de convergence de la série entière est égal à 1.

8. (a) Dessin immédiat laissé au lecteur.

(b) Procédons par récurrence. Si $n=0$ alors $P_0 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Supposons $\forall x \in \mathbb{R}^\star, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

Par théorèmes généraux, $\forall x \in \mathbb{R}^\star, f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}} \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$
où $P_{n+1}(x) = 2P_n(x) + xP_n'(x) - 3nx^2P_n(x)$. Donc $P_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$.

Par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^\star, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big)$
où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

(c) Par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f^{(n)}(x) = 0$. On déduit alors du corollaire du théorème « lim f' » que $f \in \mathcal{C}^\infty([0,+\infty[\,,\mathbb{R})$ et pour tout n, $f^{(n)}(0) = 0$.

(d) f n'est pas développable en série entière en 0, car f ne s'annule qu'en 0 et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est égale à 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

9. (a) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ par théorèmes généraux, quels que soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $0 < \frac{e^{-t}}{1+tx^2} \leqslant e^{-t}$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et comme $e^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o(t^{-2})$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+tx^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Notons $g(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+tx^2}\cdot$ Par théorèmes généraux, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. Quatre des cinq hypothèses du théorème de dérivation des intégrales paramétrées sont vérifiées et $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-2xte^{-t}}{(1+tx^2)^2}\cdot$

Soit $a > 0$. $\forall (x,t) \in [-a,a] \times \mathbb{R}_+, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2ate^{-t} = \varphi(t)$.

La fonction φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après le rappel sur la fonction Γ.

On déduit du théorème de dérivation des intégrales paramétrées que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} \frac{-2xte^{-t}}{(1+tx^2)^2}dt$.

L'énoncé demande d'admettre que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}^\star, f^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)dt$.

(b) Si $|tx^2| < 1, g(x,t) = \frac{e^{-t}}{1+tx^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n x^{2n} e^{-t}$.

On déduit du théorème rappelé que :
$\frac{\partial^{2n} g}{\partial x^{2n}}(0,t) = (-1)^n (2n)! t^n e^{-t}$ et $\frac{\partial^{2n+1} g}{\partial x^{2n+1}}(0,t) = 0$.

On déduit de la fin de (a) que $f^{(2n)}(0) = (-1)^n (2n)! \Gamma(n+1) = (-1)^n (2n)! n!$ et $f^{(2n+1)}(0) = 0$.

(c) $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} x^{2n} = (-1)^n n! x^{2n} = \alpha_n$.

Pour $x \neq 0, \left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = (n+1)x^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$. On déduit de la règle de d'Alembert que la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ diverge pour tout $x \neq 0$. On déduit du théorème rappelé que f n'est pas développable en série entière en 0.

Partie III

10. (a) Appliquons le théorème de Taylor Laplace de 3) avec $a = 0$.