LE COURS DE

MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

TOUT EN FICHES

Sous la direction de
Frédéric Bertrand
Professeur des universités à l'université de technologie de Troyes
et
Myriam Maumy-Bertrand
Maître de conférences hors classe et HDR à l'université de technologie de Troyes

LE COURS DE

MATHÉMATIQUES POUR LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

LICENCE, IUT, PRÉPAS, ÉCOLES D'INGÉNIEURS

3e ÉDITION

Sandie Ferrigno
Maître de conférences à l'université de Lorraine

Didier Marx
Agrégé de physique, docteur en génie électrique et enseignant vacataire en mathématiques appliquées à l'EEIGM et à l'ENSEM (Nancy)

Aurélie Muller-Gueudin
Maître de conférences à l'université de Lorraine

Yacoubou Rabba Idi
Agrégé de mathématiques dans la section étranger

DUNOD

Illustration de couverture :
ollirg-shutterstock.com

11 rue Paul Bert, 92240 Malakoff
ISBN 978-2-10-084044-1

www.dunod.com

Table des matières

Avant-propos

Cet ouvrage résulte de la collaboration de cinq mathématiciens (Aurélie, Frédéric, Myriam Sandie et Yacouba) et d'un physicien (Didier). Il est organisé en quatre parties : algèbre, analyse, probabilités et statistique. Il s'adresse aux étudiants des deux premières années post-bac : licences, prépas intégrées ou IUT. Ce livre peut également aider à la préparation au CAPES de mathématiques. Yacoubou Rabba Idi, un mathématicien, nous a rejoint pour la préparation de la seconde édition du livre.
Le cours, structuré en fiches, est exposé de manière claire et synthétique. Chaque fiche présente les points essentiels à retenir, des exercices d'application illustrent les notions utiles et de nombreux exercices corrigés permettent de se préparer aux examens et concours. Certains corrigés sont disponibles sur le site dunod.com sur la page de description de l'ouvrage. Quatre focus apportent enfin des compléments historiques ou techniques en lien avec des sujets de société.
Dans la collection « Tout en fiches », vous trouverez donc l'essentiel, sauf votre propre travail, bien sûr. Alors courage !
Toutes vos remarques, vos commentaires, vos critiques, et même vos encouragements seront accueillis avec plaisir aux adresses électroniques suivantes :

frederic.bertrand@utt.fr
myriam.maumy@utt.fr

Ce livre a bénéficié de la relecture attentive d'un comité de relecteurs, constitué d'enseignants et d'étudiants. Nous souhaitons qu'ils soient tous grandement remerciés ici :

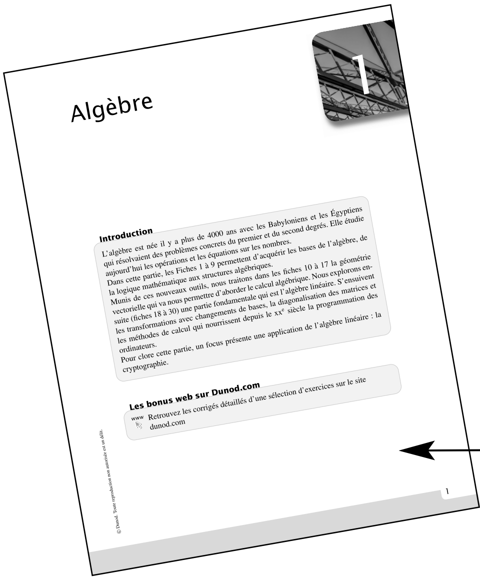
Samuela Aubin, maître de conférences à l'INSA de Lyon ;
Jean-Romain Heu, professeur agrégé à l'INSA de Strasbourg ;
Jean Labourdette, docteur en mathématique et directeur de l'ESIEA Ouest ;
Vincent Lécuyer, professeur agrégé à l'ENSIC de Nancy ;
James Ledoux, professeur des universités à l'INSA de Rennes ;
Renaud Marty et Bruno Pinçon, maîtres de conférences à l'université de Lorraine ;
Constantin Morarescu, maître de conférences à l'ENSEM de Nancy ;
Raphaële Supper, maître de conférences à l'université de Strasbourg.

Comment utiliser cet ouvrage ?

Un découpage en quatre grandes parties :

Algèbre, Analyse, Probabilités, Statistique

Des compléments sur dunod.com



Algèbre

1

Introduction

L'algèbre est née il y a plus de 4000 ans avec les Babyloniens et les Égyptiens qui résolvaient des problèmes concrets du premier et du second degrés. Elle étudie aujourd'hui les opérations et les équations sur les nombres.

Dans cette partie, les Fiches 1 à 9 permettent d'acquérir les bases de l'algèbre, de la logique mathématique aux structures algébriques.

Munis de ces nouveaux outils, nous traitons dans les fiches 10 à 17 la géométrie vectorielle qui va nous permettre d'aborder le calcul algébrique. Nous explorons ensuite (fiches 18 à 30) une partie fondamentale qui est l'algèbre linéaire. S'ensuivent les transformations avec changements de bases, la diagonalisation des matrices et les méthodes de calcul qui nourrissent depuis le xx^{e} siècle la programmation des ordinateurs.

Pour clore cette partie, un focus présente une application de l'algèbre linéaire : la cryptographie.

Les bonus web sur Dunod.com

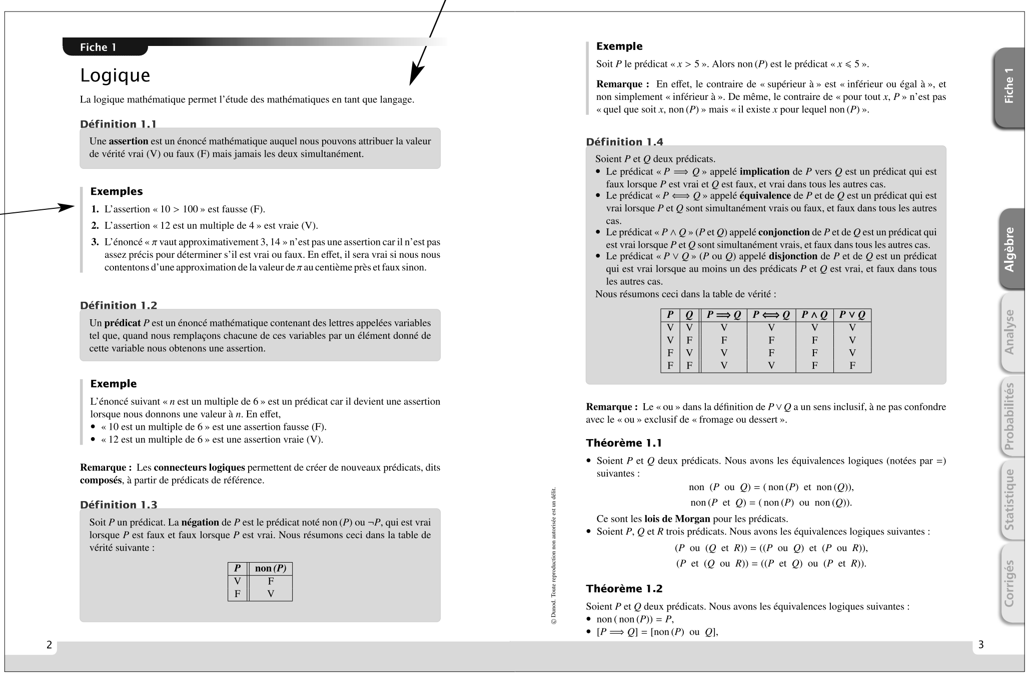
www Retrouvez les corrigés détaillés d'une sélection d'exercices sur le site dunod.com

120 fiches de cours

Les notions essentielles avec des renvois pour naviguer d'une fiche à l'autre

De très nombreux exemples

Un repérage facile



Fiche 1

Logique

La logique mathématique permet l'étude des mathématiques en tant que langage.

Définition 1.1

Une **assertion** est un énoncé mathématique auquel nous pouvons attribuer la valeur de vérité vrai (V) ou faux (F) mais jamais les deux simultanément.

Exemples

1. L'assertion « $10 > 100$ » est fausse (F).
2. L'assertion « 12 est un multiple de 4 » est vraie (V).
3. L'énoncé « π vaut approximativement 3, 14 » n'est pas une assertion car il n'est pas assez précis pour déterminer s'il est vrai ou faux. En effet, il sera vrai si nous nous contentons d'une approximation de la valeur de π au centième près et faux sinon.

Définition 1.2

Un **prédicat** P est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables tel que, quand nous remplaçons chacune de ces variables par un élément donné de cette variable nous obtenons une assertion.

Exemple

L'énoncé suivant « n est un multiple de 6 » est un prédicat car il devient une assertion lorsque nous donnons une valeur à n. En effet,
- « 10 est un multiple de 6 » est une assertion fausse (F).
- « 12 est un multiple de 6 » est une assertion vraie (V).

Remarque : Les **connecteurs logiques** permettent de créer de nouveaux prédicats, dits **composés**, à partir de prédicats de référence.

Définition 1.3

Soit P un prédicat. La **négation** de P est le prédicat noté non (P) ou $\neg P$, qui est vrai lorsque P est faux et faux lorsque P est vrai. Nous résumons ceci dans la table de vérité suivante :

P	non (P)
V	F
F	V

Exemple

Soit P le prédicat « $x > 5$ ». Alors non (P) est le prédicat « $x \leqslant 5$ ».

Remarque : En effet, le contraire de « supérieur à » est « inférieur ou égal à », et non simplement « inférieur à ». De même, le contraire de « pour tout x, P » n'est pas « quel que soit x, non (P) » mais « il existe x pour lequel non (P) ».

Définition 1.4

Soient P et Q deux prédicats.
- Le prédicat « $P \Longrightarrow Q$ » appelé **implication** de P vers Q est un prédicat qui est faux lorsque P est vrai et Q est faux, et vrai dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \Longleftrightarrow Q$ » appelé **équivalence** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \wedge Q$ » (P et Q) appelé **conjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \vee Q$ » (P ou Q) appelé **disjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque au moins un des prédicats P et Q est vrai, et faux dans tous les autres cas.

Nous résumons ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F

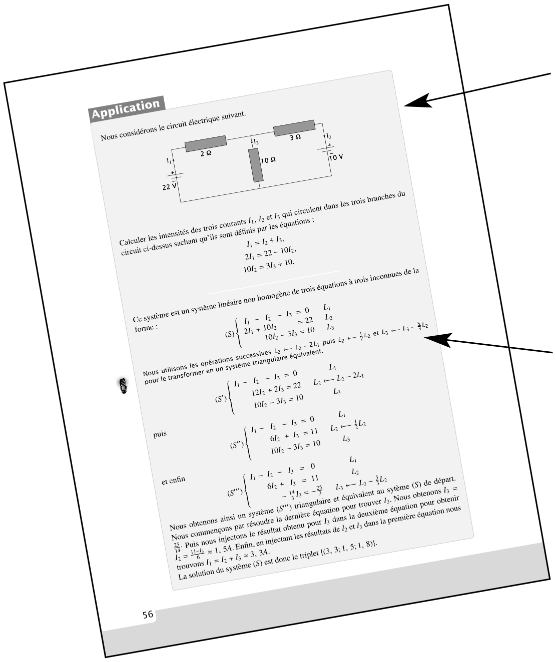
Remarque : Le « ou » dans la définition de $P \vee Q$ a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le « ou » exclusif de « fromage ou dessert ».

Théorème 1.1

- Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques (notées par =) suivantes :
$$\text{non } (P \text{ ou } Q) = (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)),$$
$$\text{non}(P \text{ et } Q) = (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)).$$
Ce sont les **lois de Morgan** pour les prédicats.
- Soient P, Q et R trois prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :
$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) = ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)),$$
$$(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) = ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)).$$

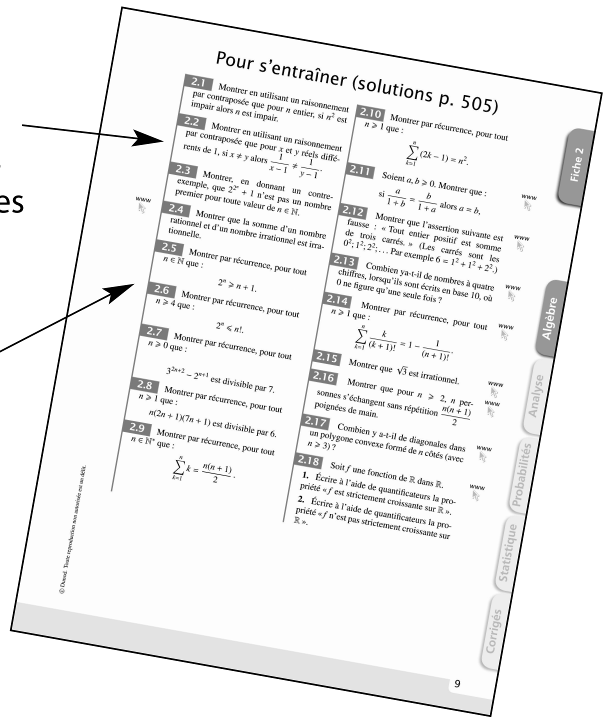
Théorème 1.2

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :
- non (non (P)) = P,
- $[P \Longrightarrow Q] = [\text{non}(P) \text{ ou } Q]$,



Des exemples d'applications dans tous les domaines des sciences

Des conseils méthodologiques



Des exercices pour s'entraîner
Les solutions sont regroupées en fin d'ouvrage ou disponibles sur le site dunod.com

Des renvois aux "+ en ligne"

Retrouvez les "+ en ligne" sur dunod.com :

– Les corrigés détaillés d'une sélection d'exercices signalés par le pictogramme .
– Des informations sur le logiciel libre **R**.

Algèbre

Introduction

L'algèbre est née il y a plus de 4000 ans avec les Babyloniens et les Égyptiens qui résolvaient des problèmes concrets du premier et du second degrés. Elle étudie aujourd'hui les opérations et les équations sur les nombres.
Dans cette partie, les Fiches 1 à 9 permettent d'acquérir les bases de l'algèbre, de la logique mathématique aux structures algébriques.
Munis de ces nouveaux outils, nous traitons dans les Fiches 10 à 17 la géométrie vectorielle qui va nous permettre d'aborder le calcul algébrique. Nous explorons ensuite (fiches 18 à 30) une partie fondamentale qui est l'algèbre linéaire. S'ensuivent les transformations avec changements de bases, la diagonalisation des matrices et les méthodes de calcul qui nourrissent depuis le XX^{e} siècle la programmation des ordinateurs.
Pour clore cette partie, un focus présente une application de l'algèbre linéaire : la cryptographie.

Les bonus web sur dunod.com

www Retrouvez les corrigés détaillés d'une sélection d'exercices sur le site dunod.com.

Fiche 1

Logique

La logique mathématique permet l'étude des mathématiques en tant que langage.

Définition 1.1

Une **assertion** est un énoncé mathématique auquel nous pouvons attribuer la valeur de vérité vrai (V) ou faux (F) mais jamais les deux simultanément.

Exemples

1. L'assertion « $10 > 100$ » est fausse (F).
2. L'assertion « 12 est un multiple de 4 » est vraie (V).
3. L'énoncé « π vaut approximativement $3,14$ » n'est pas une assertion car il n'est pas assez précis pour déterminer s'il est vrai ou faux. En effet, il sera vrai si nous nous contentons d'une approximation de la valeur de π au centième près et faux sinon.

Définition 1.2

Un **prédicat** P est un énoncé mathématique contenant des lettres appelées variables tel que, quand nous remplaçons chacune de ces variables par un élément donné de cette variable nous obtenons une assertion.

Exemple

L'énoncé suivant « n est un multiple de 6 » est un prédicat car il devient une assertion lorsque nous donnons une valeur à n. En effet,

- « 10 est un multiple de 6 » est une assertion fausse (F).
- « 12 est un multiple de 6 » est une assertion vraie (V).

Les **connecteurs logiques** permettent de créer de nouveaux prédicats, dits **composés**, à partir de prédicats de référence.

Définition 1.3

Soit P un prédicat. La **négation** de P est le prédicat noté non (P) ou $\neg P$, qui est vrai lorsque P est faux et faux lorsque P est vrai. Nous résumons ceci dans la table de vérité suivante :

P	**non** (P)
V	F
F	V

Exemple

Soit P le prédicat « $x > 5$ ». Alors non (P) est le prédicat « $x \leqslant 5$ ».

Remarque : en effet, le contraire de « supérieur à » est « inférieur ou égal à », et non simplement « inférieur à ». De même, le contraire de « pour tout x, P » n'est pas « quel que soit x, non (P) » mais « il existe x pour lequel non (P) ».

Définition 1.4

Soient P et Q deux prédicats.

- Le prédicat « $P \Longrightarrow Q$ » appelé **implication** de P vers Q est un prédicat qui est faux lorsque P est vrai et Q est faux, et vrai dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \Longleftrightarrow Q$ » appelé **équivalence** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \wedge Q$ » (P et Q) appelé **conjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais, et faux dans tous les autres cas.
- Le prédicat « $P \vee Q$ » (P ou Q) appelé **disjonction** de P et de Q est un prédicat qui est vrai lorsque au moins un des prédicats P et Q est vrai, et faux dans tous les autres cas.

Nous résumons ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	F	F

Le « ou » dans la définition de $P \vee Q$ a un sens inclusif, à ne pas confondre avec le « ou » exclusif de « fromage ou dessert ».

Théorème 1.1

- Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques (notées par =) suivantes :

$$\text{non } (P \text{ ou } Q) = (\text{non}(P) \text{ et } \text{non}(Q)),$$
$$\text{non}(P \text{ et } Q) = (\text{non}(P) \text{ ou } \text{non}(Q)).$$

  Ce sont les **lois de Morgan** pour les prédicats.
- Soient P, Q et R trois prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

$$(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)) = ((P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)),$$
$$(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)) = ((P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)).$$

Théorème 1.2

Soient P et Q deux prédicats. Nous avons les équivalences logiques suivantes :

- $\text{non}(\text{non}(P)) = P$,
- $[P \Longrightarrow Q] = [\text{non}(P) \text{ ou } Q]$,

- $[\text{non } (P \Longrightarrow Q)] = [P \text{ et non}(Q)]$,
- $[P \Longrightarrow Q] = [\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)]$,
- $[P \Longleftrightarrow Q] = [(P \Longrightarrow Q) \text{ et } (Q \Longrightarrow P)]$.

$P \Longrightarrow Q$ signifie que Q est une condition nécessaire pour P. L'implication $\text{non}(Q) \Longrightarrow \text{non}(P)$ est la **contraposée** de $P \Longrightarrow Q$. L'implication $Q \Longrightarrow P$ est la **réciproque** de $P \Longrightarrow Q$. Pour démontrer une équivalence, nous démontrons souvent une implication et sa réciproque.

Définition 1.5

Une **tautologie** est une formule propositionnelle qui prend la valeur « vrai » quelles que soient les valeurs données à ses arguments.

Exemples

Les formules suivantes sont des tautologies :

1. P ou non(P), qui est le **principe du tiers exclu**,
2. $P \Longrightarrow P$,
3. $(P \text{ et } Q) \Longrightarrow P$,
4. $P \Longrightarrow (P \text{ ou } Q)$.

Définition 1.6

Une **contradiction** est une formule qui prend la valeur « faux » quelles que soient les valeurs données à ses arguments.

Exemple

P et non(P) est une contradiction, c'est le **principe de non-contradiction**. Sa négation, P est vraie ou non P est vraie, est donc une tautologie.

Application

Nous suspectons trois élèves, Anita, Bernard et Christophe d'avoir dérobé du matériel dans un laboratoire de Physique. Nous possédons les informations suivantes à leur sujet :

- Si Christophe n'est pas coupable alors Bernard est coupable,
- Si Anita n'est pas coupable alors Christophe est coupable,
- Si Christophe est coupable alors Anita l'est aussi,
- Si Anita est coupable alors Bernard ne l'est pas.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- C : « Christophe est coupable »,
- B : « Bernard est coupable »,
- A : « Anita est coupable »,
- D : « Anita ou Bernard est coupable ».

- La première information de l'énoncé se traduit par non $(C) \Longrightarrow B$. Donc non $(B) \Longrightarrow C$ par contraposée.
- La deuxième information se traduit par non $(A) \Longrightarrow C$. Donc non $(C) \Longrightarrow A$ par contraposée.
- La troisième information se traduit par $C \Longrightarrow A$. Donc non $(A) \Longrightarrow$ non (C) par contraposée.
- Enfin, la dernière information se traduit par $A \Longrightarrow$ non (B). Donc $B \Longrightarrow$ non (A) par contraposée.

Nous en déduisons que :

- L'assertion C : « Christophe est coupable » est vraie.
  En effet, si nous supposons que non (C) est vrai, non $(C) \Longrightarrow B$, alors $B \Longrightarrow$ non (A) et non $(A) \Longrightarrow C$. Nous avons alors non $(C) \Longrightarrow C$ ce qui est contradictoire.
- L'assertion B : « Bernard est coupable » est fausse.
  En effet, si nous supposons que B est vrai, $B \Longrightarrow$ non (A), alors non $(A) \Longrightarrow$ non (B). Nous aurions alors $B \Longrightarrow$ non (B) ce qui est contradictoire.
- L'assertion A : « Anita est coupable » est vraie.
  En effet, si nous supposons que non (A) est vrai, non $(A) \Longrightarrow C$, alors $C \Longrightarrow A$ et non $(A) \Longrightarrow A$ ce qui est impossible.
- Enfin, comme Bernard n'est pas coupable, l'assertion D : « Anita ou Bernard est coupable » ne sera vraie que si Anita est coupable, ce qui est le cas puisque nous avons montré que l'assertion A est vraie dans l'item précédent. Donc l'assertion D est vraie.

Pour s'entraîner (solutions p. 505)

1.1 Soit l'assertion « $x = 2$ ». Donner la négation de cette assertion.

1.2 Écrire les contraposées des implications suivantes :

1. $xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0$ et $y \neq 0$,
2. $[n$ premier$] \Longrightarrow [n = 2$ ou n impair$]$.

1.3 Montrer que $[n$ pair$] \Longleftrightarrow [n^2$ pair$]$.

1.4 Nous considérons les assertions P et Q listées ci-dessous. Donner dans chaque cas la valeur de vérité pour $P \wedge Q$.

- P : « Paris est la capitale de l'Espagne », Q : « $2 + 2 = 4$ »,
- P : « Un chat ronronne », Q : « Un carré a quatre cotés égaux »,
- P : « $4 \times 6 = 21$ », Q : « Venise se situe en Italie »,
- P : « Deux droites parallèles se coupent en un point », Q : « Paris est une ville de moins de dix mille habitants ».

1.5 Nous considérons les assertions P et Q listées ci-dessous. Donner dans chaque cas la valeur de vérité pour $P \vee Q$.

- P : « Un oiseau sait nager », Q : « Paris est la capitale de la France »,
- P : « Un chien a cinq pattes », Q : « Un triangle a trois côtés »,
- P : « $2 < 3$ », Q : « Madrid est la capitale de l'Espagne »,
- P : « Une voiture a deux roues », Q : « $1 + 2 = 4$ ».

Fiche 2

Quantificateurs et raisonnements mathématiques

1. Quantificateurs

À partir d'un prédicat P, défini sur un ensemble E, nous pouvons construire de nouvelles assertions, dites quantifiées, en utilisant les **quantificateurs** « quel que soit » et « il existe ».

Définition 2.1

Le quantificateur universel « **quel que soit** » ou « **pour tout** », noté par $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\forall x \in E, P(x)$ » qui est vraie si pour tous les éléments $x \in E$, l'assertion $P(x)$ est vraie.

Exemple
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, l'assertion P : « $n^2 > 0$ » est vraie.

Définition 2.2

Le quantificateur existentiel « **il existe** », noté par $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée « $\exists x \in E, P(x)$ » qui est vraie si nous pouvons trouver au moins un élément $x \in E$ tel que l'assertion $P(x)$ soit vraie. S'il en existe un et un seul nous pourrons écrire « $\exists! x \in E, P(x)$ » et nous dirons qu'il existe un unique élement x de E vérifiant $P(x)$.

Exemple
L'assertion quantifiée P : « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 4$ » est vraie.

Si « $\forall x \in E, P(x)$ » est vraie alors « $\exists x \in E, P(x)$ » est vraie.

Définition 2.3

Soit $P(x)$ un prédicat sur un ensemble E. Alors,

$$[\text{non}\,(\forall x \in E,\ P(x))] = [\exists x \in E, \text{non}\,(P(x))]\,,$$

$$[\text{non}\,(\exists x \in E,\ P(x))] = [\forall x \in E, \text{non}\,(P(x))]\,.$$

Soient E et F deux ensembles. Soit $P(x, y)$ un prédicat à deux variables avec $x \in E$ et $y \in F$.

- L'assertion quantifiée « $\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)$ » est vraie lorsque tous les éléments x de E et tous les éléments y de F vérifient $P(x, y)$.
- L'assertion quantifiée « $\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)$ » est vraie lorsqu'il existe au moins un élément x appartenant à E et au moins un élément y appartenant à F vérifiant $P(x, y)$.

Si nous utilisons deux fois le même quantificateur, l'ordre n'a pas d'importance, nous pouvons alors les permuter. En revanche, si les quantificateurs sont différents, leur ordre est important.

2. Raisonnements mathématiques

Nous donnons dans ce paragraphe quelques méthodes de démonstrations basées sur des raisonnements mathématiques que nous serons amenés à utiliser dans les prochaines fiches de cet ouvrage.

2.1. Raisonnement par hypothèse auxiliaire ou déduction

Le but est de démontrer qu'un énoncé Q est vrai. Si l'énoncé P est vrai et si l'implication $P \Longrightarrow Q$ est vraie alors l'énoncé Q est nécessairement vrai.

2.2. Raisonnement par l'absurde

Le but est de démontrer qu'un énoncé P est vrai. Un raisonnement par l'absurde consiste à montrer que non (P) entraîne à la fois un énoncé Q et son contraire non (Q). Nous supposons l'énoncé non (P) vrai et nous cherchons alors Q qui, sous cette hypothèse, serait à la fois vrai et faux. Nous disons que nous avons obtenu une contradiction ou que l'hypothèse non (P) est contradictoire. Par conséquent non (P) est fausse, donc P est vraie.

2.3. Raisonnement par contraposée

Le but est de démontrer des résultats en faisant apparaître une implication « $P \Longrightarrow Q$ ». Le principe est qu'au lieu de montrer « $P \Longrightarrow Q$ » nous montrons sa contraposée « non $(Q) \Longrightarrow$ non (P) ». Nous faisons l'hypothèse que non (Q) est vraie et nous montrons que cela entraîne que non (P) est vraie.

2.4. Raisonnement par contre-exemple

Le raisonnement par contre-exemple sert à montrer qu'un énoncé de la forme « $\forall x \in E, P(x)$ » est un énoncé faux. Nous cherchons alors à trouver un élément x de E qui ne vérifie pas $P(x)$.

2.5. Raisonnement par récurrence simple

Le raisonnement par récurrence simple sert à montrer qu'un énoncé de la forme « $\forall n \geqslant n_0, P(n)$ » est vrai. Si la propriété $P(n_0)$ est vraie et si l'implication « $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ » est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$. Il s'effectue en trois étapes :

- **Étape d'initialisation.** Nous vérifions que $P(n_0)$ est vraie.
- **Étape d'hérédité.** Fixons un entier naturel $n \geqslant n_0$, puis montrons que si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie.
- **Étape de conclusion.** Nous concluons que l'assertion $P(n)$ est vraie $\forall n \geqslant n_0$.

Il existe également le raisonnement par récurrence à deux pas et le raisonnement par récurrence forte. Pour le premier, nous supposons $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies et nous montrons que $P(n+2)$ est vraie. Pour le second, nous supposons que pour tout $k \leqslant n$, $P(k)$ est vraie et nous montrons que $P(n+1)$ est vraie.

Application

1. Démontrer par l'absurde l'énoncé suivant : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. Soient x et y deux réels. Montrer que :

$$xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0 \quad \text{et} \quad y \neq 0.$$

3. Montrer que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na.$$

---

1. Si $\sqrt{2}$ est rationnel, nous pouvons écrire $\sqrt{2}$ sous la forme p/q, avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et p et q premiers entre eux. Nous avons alors $p^2 = 2q^2$. Donc p^2 est pair ce qui implique que p l'est également. Donc si p est pair, alors p peut s'écrire sous la forme $2n$. Donc $q^2 = 2n^2$ et par conséquent q est aussi pair. Mais alors, p et q ne peuvent pas être premiers entre eux, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, nous ne pouvons pas écrire $\sqrt{2}$ sous la forme p/q et donc $\sqrt{2}$ est bien irrationnel.

2.

Nous montrons ce résultat en utilisant un raisonnement par contraposée.

La contraposée de $(xy \neq 0 \Longrightarrow x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$ est :

$$x = 0 \text{ ou } y = 0 \Longrightarrow xy = 0.$$

Montrons donc cette assertion. Si nous choisissons $x = 0$ ou $y = 0$, alors le produit xy est nécessairement nul. Nous en déduisons donc le résultat cherché.

3. Pour montrer ce résultat nous allons utiliser le raisonnement par récurrence. Nous allons procéder en trois étapes.

- **Étape d'initialisation**
  Pour $n = 0$, nous avons $(1+a)^0 = 1$ qui est bien supérieur ou égal à $1 + na = 1 + 0 \times a$.

- **Étape d'hérédité**
  Nous supposons que la propriété est vraie à un ordre $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $(1+a)^n \geqslant 1 + na$. Nous voulons montrer que $(1+a)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)a$. Nous avons, grâce à l'hypothèse d'hérédité,

$$\begin{aligned} (1+a)^{n+1} &= (1+a)(1+a)^n, \\ &\geqslant (1+a)(1+na), \\ &= 1 + (n+1)a + na^2, \\ &\geqslant 1 + (n+1)a, \end{aligned}$$

  car $1 + a > 0$ et $na^2 \geqslant 0$. Donc l'assertion est vraie à l'ordre $n+1$.

- **Étape de conclusion**
  Nous en déduisons que l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour s'entraîner (solutions p. 505)

2.1 Montrer en utilisant un raisonnement par contraposée que pour n entier, si n^2 est impair alors n est impair.

2.2 Montrer en utilisant un raisonnement par contraposée que pour x et y réels différents de 1, si $x \neq y$ alors $\dfrac{1}{x-1} \neq \dfrac{1}{y-1}$.

2.3 Montrer, en donnant un contre-exemple, que $2^{2^n} + 1$ n'est pas un nombre premier pour toute valeur de $n \in \mathbb{N}$.

2.4 Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est irrationnelle.

2.5 Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ que :

$$2^n \geqslant n + 1.$$

2.6 Montrer par récurrence, pour tout $n \geqslant 4$ que :

$$2^n \leqslant n!.$$

2.7 Montrer par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$ que :

$$3^{2n+2} - 2^{n+1} \text{ est divisible par 7.}$$

2.8 Montrer par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$n(2n+1)(7n+1) \text{ est divisible par 6.}$$

2.9 Montrer par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.10 Montrer par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

2.11 Soient $a, b \geqslant 0$. Montrer que :

$$\text{si } \frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a} \text{ alors } a = b,$$

2.12 Montrer que l'assertion suivante est fausse : « Tout entier positif est somme de trois carrés. » (Les carrés sont les $0^2; 1^2; 2^2; \ldots$ Par exemple $6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$.)

2.13 Combien y a-t-il de nombres à quatre chiffres, lorsqu'ils sont écrits en base 10, où 0 ne figure qu'une seule fois ?

2.14 Montrer par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

2.15 Montrer que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

2.16 Montrer que pour $n \geqslant 2$, n personnes s'échangent sans répétition $\dfrac{n(n+1)}{2}$ poignées de main.

2.17 Combien y a-t-il de diagonales dans un polygone convexe formé de n côtés (avec $n \geqslant 3$) ?

2.18 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété « f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ».

2. Écrire à l'aide de quantificateurs la propriété « f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}$ ».

Ensembles

1. Définitions

Définition 3.1

Un **ensemble** E est une collection d'objets distincts. Ces objets s'appellent les **éléments** de cet ensemble.

Pour tout élément x, nous pouvons dire si l'assertion x appartient à E ($x \in E$) est vraie ou fausse.

Exemples

1. L'**ensemble vide**, c'est-à-dire l'ensemble qui ne contient aucun élément, est noté par $\emptyset$.
2. L'ensemble ne contenant qu'un seul élément x est un **singleton**, noté $\{x\}$.
3. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
4. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.
5. $\{1; 2; 3; 4\}$ est l'ensemble contenant les entiers 1, 2, 3 et 4.

Il est possible de définir un ensemble de deux manières :
- **paramétrique**, comme par exemple $\{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$;
- **implicite**, comme par exemple $\{x \in \mathbb{R},\ x^3 - 2x + 1 = 0\}$.

Définition 3.2

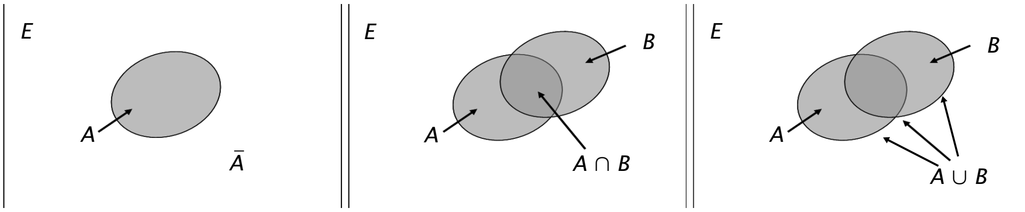
Soient E et F deux ensembles. Nous disons que E est **inclus** dans F et nous notons $E \subset F$, si et seulement si tous les éléments de E appartiennent aussi à F. Nous disons aussi que E est une partie de F ou que F contient E. L'ensemble des parties de F se note $\mathcal{P}(F)$.

Exemples

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ est contenu dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.
2. $\{1\}$ est contenu dans $\{1; 2; 3; 4\}$.

Définition 3.3

Soient E un ensemble, A et B des parties de E.
- Nous définissons le **complémentaire** de A dans E par $\overline{A} = \{x \in E; x \notin A\}$.
- Nous définissons l'**intersection** de A et B par $A \cap B = \{x \in E; x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- Nous définissons l'**union** de A et B par $A \cup B = \{x \in E; x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
- Deux ensembles A et B sont **disjoints** s'il n'existe aucun élément commun à A et à B, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

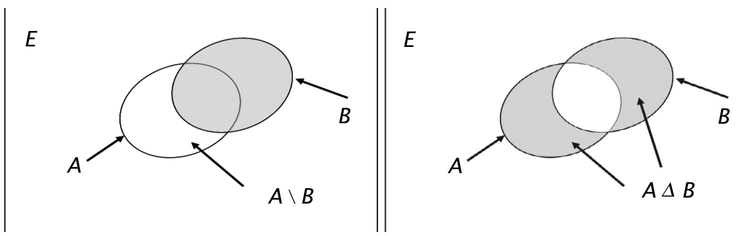


Le « ou » dans la définition de l'union a un sens inclusif, c'est-à-dire que $A \cup B$ est l'ensemble des éléments x de E qui appartiennent à l'une au moins des parties A et B. Attention dans la vie courante, le « ou » a un sens exclusif. Par exemple, au restaurant le menu du jour vous propose fromage ou dessert, l'un ou l'autre mais pas les deux !

Définition 3.4

Soient E un ensemble, A et B des parties de E. Nous définissons

- la **différence** par $A \setminus B = \{x \in E ; x \in A \ \text{ et } \ x \notin B\} = A \cap \overline{B}$.
- la **différence symétrique** par $A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.



- $A \vartriangle B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une et une seule des parties A et B.
- $A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- La différence symétrique de deux parties A et B est commutative : $A \vartriangle B = B \vartriangle A$.

Définition 3.5

- Un **recouvrement** d'une partie A de E est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties telles que $A_i \subset E$ et $A \subset \cup_{i \in I} A_i$.
- Une **partition** P d'un ensemble E est une famille de parties non vides de E $(A_i)_{i \in I}$ telles que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\cup_{i \in I} A_i = E$.

Définition 3.6

Soient A et B deux ensembles. Alors le **produit cartésien** de ces deux ensembles, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples $(a ; b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \{(a ; b) \ ; \ a \in A \ \text{ et } \ b \in B\} .$$

Exemple

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x ; y) ; x \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ y \in \mathbb{R}\}$.

Plus généralement, le produit cartésien de n ensembles E_i est :

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) ; x_1 \in E_1 ; \ldots ; x_n \in E_n\}.$$

Si $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$, alors nous notons E^n.

2. Propriétés

Théorème 3.1

Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Alors, nous avons les propriétés suivantes sur le complémentaire, la réunion et l'intersection :

- $\overline{E} = \emptyset$ et $\overline{\emptyset} = E$,
- $\overline{\overline{A}} = A$,
- si $A \subset B$, alors $\overline{B} \subset \overline{A}$,
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (lois de Morgan),
- $A \cup B = B \cup A$: commutativité de l'union,
- $A \cap B = B \cap A$: commutativité de l'intersection,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$: associativité de l'union,
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$: associativité de l'intersection,
- $A \cup A = A$; $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup E = E$,
- $A \cap A = A$; $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap E = A$,
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: distributivité de l'intersection par rapport à l'union,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: distributivité de l'union par rapport à l'intersection.

Application

Nous allons montrer trois des propriétés précédemment énoncées ci-dessus. Cela va nous permettre d'utiliser le **raisonnement par double inclusion**, très utile pour effectuer des démonstrations.

1. Montrer que $\overline{\overline{A}} = A$.

2. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

3. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

1.

Pour cela, nous devons montrer la double inclusion $\overline{\overline{A}} \subset A$ et $A \subset \overline{\overline{A}}$.

Soit $x \in \overline{\overline{A}}$, alors $x \notin \overline{A}$ et donc $x \in A$. Nous avons bien $\overline{\overline{A}} \subset A$.

Réciproquement : soit $x \in A$, alors $x \notin \overline{A}$ et donc $x \in \overline{\overline{A}}$. Nous avons bien $A \subset \overline{\overline{A}}$.

La double inclusion permet donc de conclure que $\overline{\overline{A}} = A$.

2.

Nous devons montrer la double inclusion $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Soit $x \in \overline{A \cap B}$, alors $x \notin A \cap B$. Nous avons donc en particulier $x \notin A$ ou $x \notin B$ c'est-à-dire $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$. Donc $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Réciproquement : soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$, alors, $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}$ c'est-à-dire que $x \notin A$ ou $x \notin B$. En particulier, $x \notin A \cap B$ donc $x \in \overline{A \cap B}$. Nous avons donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.
La double inclusion permet de conclure que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
3.
Nous devons pour cela montrer la double inclusion $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Soit $x \in \overline{A \cup B}$, alors $x \notin A \cup B$. Nous avons donc en particulier $x \notin A$ et $x \notin B$ c'est-à-dire $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. Donc $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ et ainsi nous avons montré que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Réciproquement : soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, alors $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$ c'est-à-dire que $x \notin A$ et $x \notin B$. Donc $x \notin A \cup B$ et $x \in \overline{A \cup B}$. Nous avons montré $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Cela nous permet de conclure que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Nous aurions également pu raisonner par équivalence pour réaliser ces démonstrations mais lorsque les preuves à effectuer sont plus complexes, cela est souvent source d'erreurs et il vaut mieux privilégier le raisonnement par double inclusion.

Pour s'entraîner (solutions p. 506)

3.1 Soient $A = \{1; 2; 3\}$ et $B = \{2; 3; 4\}$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

3.2 Soit $A = \{x \in \mathbb{R};\ x > 9\}$. Déterminer le complémentaire $\overline{A}$ de A.

3.3 Trouver un exemple d'ensembles A, B et C tels que $A \cup B = A \cup C$ et $B \neq C$.

3.4 Démontrer que si $A \cup B = A \cap B$ alors $A = B$.

3.5 Démontrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$ alors $B = C$. Que dire de la réciproque ?

3.6 Simplifier les quatre expressions suivantes :

1. $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$,

2. $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$,

3. $\overline{A} \cup (A \cap B)$,

4. $\overline{A} \cap (A \cup \overline{B})$.

3.7 Prouver que la différence symétrique est commutative.

www

3.8 Donner deux exemples pour lesquels $A \times B = B \times A$, puis deux autres pour lesquels $A \times B \neq B \times A$.

www

3.9 Montrer que si $A \subset B$, alors, pour tout C, nous avons :
$A \times C \subset B \times C$.

www

3.10 Si A, B, C et D sont des parties d'un ensemble E, montrer que :

$$\begin{cases} B \setminus C \subset A \\ C \setminus D \subset A \end{cases} \Rightarrow B \setminus D \subset A.$$

www

3.11 Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E, montrer que :
$A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

www

3.12 Si A, B et C sont des parties d'un ensemble E, montrer que :
$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$.

www