CHAPITRE

1

Raisonnement Vocabulaire ensembliste

A. Éléments de logique

1. Construction de propositions

La logique (mathématique) s'intéresse
– aux règles de construction de phrases mathématiques correctes : propositions ou énoncés,
– et aux règles permettant d'établir la vérité de ces phrases : théorèmes ou propriétés.

Un **axiome** est une proposition que l'on pose comme vraie.

Si P et Q sont des propositions construites à partir de propositions A, B, $\ldots$, la notation

$$P \longmapsto Q \quad \text{signifie que} \quad P \text{ et } Q \text{ sont synonymes.}$$

Définition 1

Une **table de vérité** est un tableau qui indique si une proposition P, construite à partir de propositions A, B, C, $\ldots$, est vraie ou fausse suivant les valeurs de vérité de A, B, C, $\ldots$

Définition par tables de vérité de $\overline{A}$, $A \vee B$, $A \wedge B$

Étant donné des propositions A, B, on définit de nouvelles propositions : [1]

- la négation «non A» de A, notée $\overline{A}$, c'est la proposition contraire de A ;
elle est vraie quand A est fausse et fausse quand A est vraie.
- la disjonction «A ou B», notée $A \vee B$,
- la conjonction «A et B», notée $A \wedge B$. [2]

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

[1] Dans ces tableaux, lorsqu'une proposition est vraie, on lui attribue la valeur 1, lorsqu'elle est fausse, on lui attribue la valeur 0.

[2] $A \wedge \overline{A}$ est toujours fausse.

Définition 2

Implication

Étant donné des propositions A et B, l'implication $A \Rightarrow B$ est définie par :

$$(A \Rightarrow B) \longmapsto (\overline{A} \vee B). \text{ [3]}$$

[3] Noter que $A \Rightarrow B$ peut être vraie sans que B le soit. Mais si $A \Rightarrow B$ est vraie, B est une condition nécessaire pour A et A est une condition suffisante pour B.

Définition 3

Équivalence

Étant donné des propositions A et B, l'équivalence $A \iff B$ est définie par :

$$(A \iff B) \longmapsto \big((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)\big). \text{ [4]}$$

[4] $A \iff B$ et $A \longmapsto B$ n'ont la même signification.
$A \iff B$ est vraie quand A et B sont simultanément vraies ou fausses. Dans ce cas, A et B sont des conditions nécessaires et suffisantes l'une pour l'autre.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \iff B$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

Propriété 1

Étant donné une proposition A, on a : $\overline{\overline{A}} \iff A$.

Étant donné des propositions A et B, on a :

$$\overline{A \vee B} \iff \overline{A} \wedge \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \wedge B} \iff \overline{A} \vee \overline{B}.$$

$$(A \Rightarrow B) \iff (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}). \text{ [5]}$$

$$\overline{A \Rightarrow B} \iff A \wedge \overline{B}.$$

[5] L'implication $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ est l'implication contraposée de $A \Rightarrow B$.

Propriété 2

Étant donné des propositions A, B et C, vraies ou fausses,
l'implication $\left[(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)\right] \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est vraie.

2. Quantificateurs

✎ (6) Les énoncés concernent les éléments d'un ensemble.

L'énoncé $A(x)$ peut être vrai ou faux pour un élément $x \in E$. ✎ (6)
On forme de nouvelles propositions en s'intéressant aux éléments de E qui vérifient cet énoncé.

Notation 1

$\exists x \in E,\ A(x)$ exprime qu'il existe un élément de E qui vérifie la proposition A. ✎ (7)

✎ (7) $\{x \in E / A(x)\} \neq \varnothing$.
«un» est à prendre au sens de «un au moins».

Notation 2

$\forall x \in E,\ A(x)$ exprime que tous les éléments de E vérifient la proposition A. ✎ (8)

✎ (8) $\{x \in E / A(x)\} = E$

Remarques

- Étant donné une proposition A concernant deux objets, les énoncés
$$\exists x,\ \exists y,\ \ A(x, y) \quad \text{et} \quad \exists y,\ \exists x,\ A(x, y) \quad \text{sont équivalents.}$$
- Il en est de même pour $\forall x, \forall y, A(x, y)$ et $\forall y, \forall x, A(x, y)$.
- Mais $\exists x, \forall y, A(x, y)$ et $\forall y, \exists x, A(x, y)$ ne veulent pas dire la même chose !

Comparer par exemple $\exists x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, x < y$ et $\forall y \in \mathbb{Z}, \exists x \in \mathbb{Z}, x < y$.

Règle 1

Les quantificateurs sont écrits avant la proposition à quantifier.
Un objet affecté du quantificateur $\exists$ dépend de tous les objets affectés de $\forall$ qui sont placés avant lui dans le même énoncé.

Règle 2

La notation $\forall x \in E,\ A(x)$ est un condensé de $\forall x,\ \left(x \in E \Rightarrow A(x)\right)$.
La notation $\exists x \in E,\ A(x)$ est un condensé de $\exists x,\ \left(x \in E \text{ et } A(x)\right)$.

Règle 3

Quantificateurs et négation :
(1) non$\left(\forall\, x,\ A(x)\right) \longmapsto \exists\, x,\ \overline{A}(x)$ ✎ (9) (2) non$\left(\exists\, x,\ A(x)\right) \longmapsto \forall\, x,\ \overline{A}(x)$.

✎ (9) Pour montrer que la proposition $(\forall x, A(x))$ est fausse, on exhibe un contre-exemple.

Exemple 1 Limite d'une suite réelle

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est limite de (u_n) lorsque :
$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists p \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
Écrivons la phrase logique exprimant qu'un réel ℓ n'est pas limite de (u_n) :
$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ \left(n \geqslant p \text{ et } |u_n - \ell| > \varepsilon\right).$$

3. Méthodes de démonstration

1) Pour montrer qu'une proposition A est vraie, on peut

- **raisonner par implication** : on cherche une condition suffisante pour A ; cela consiste à déterminer une proposition B telle que B et $B \Rightarrow A$ soient vraies ; ce type de raisonnement est dit direct ;
- **raisonner par l'absurde** : on cherche une proposition B telle que $\left(\overline{A} \Rightarrow B \wedge \overline{B}\right)$ soit vraie. La proposition $B \wedge \overline{B}$ étant fausse, A est vraie. Autrement dit, supposer A faux conduit à l'absurdité B vraie et B fausse.

2) En particulier, pour montrer qu'une implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, on peut

- **raisonner par implication** en cherchant une condition nécessaire pour P et suffisante pour Q ; cela consiste à déterminer une proposition R telle que $(P \Rightarrow R)$ et $(R \Rightarrow Q)$ soient vraies ;
- **raisonner par contraposition** c'est-à-dire montrer que l'implication équivalente $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ est vraie ;
- **raisonner par l'absurde** en cherchant une proposition R telle que $\left(P \wedge \overline{Q} \Rightarrow R \wedge \overline{R}\right)$ soit vraie.

3) Pour montrer qu'une équivalence $P \iff Q$ est vraie, on peut

- **procéder par équivalence** en cherchant une proposition R telle que les équivalences $P \iff R$ et $R \iff Q$ soient vraies ;
- **procéder par double implication** en montrant que les implications $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

Exemple 2

- Montrons $\forall n \in \mathbb{Z}$, n impair $\Rightarrow$ 8 divise $n^2 - 1$ par un raisonnement direct.

Ici on note $P(n)$: n est impair, $Q(n)$: 8 divise $n^2 - 1$, $R(n)$: il existe $k \in \mathbb{Z}$, $n = 2k + 1$.

On a, pour tout entier n : $P(n) \Rightarrow R(n)$ et $R(n) \Rightarrow Q(n)$.

En effet, par définition d'un entier impair, on a : $P(n) \iff R(n)$.

De plus, si $R(n)$ est vrai, il vient $n^2 - 1 = 4k(k+1)$ et donc $n^2 - 1$ est multiple de 8, puisque l'un des entiers consécutifs k et $k+1$ est pair.

- On en déduit : $\forall n \in \mathbb{Z}$, n^2 pair $\Rightarrow$ n pair.

En effet, pour tout entier n : n^2 pair $\Rightarrow$ 8 ne divise pas $n^2 - 1$ et le résultat en découle par contraposition de l'implication précédente.

- Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, par l'absurde.

Ici, soit la proposition A : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On suppose A faux : $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Sachant que tout rationnel peut être représenté par une fraction irréductible, on déduit l'existence de deux entiers p et q, non nuls, et de parité distincte tels que $q\sqrt{2} = p$. Il en découle que $p^2 = 2q^2$ est pair donc (par l'implication précédente) que p est pair, c'est-à-dire de la forme $p = 2p'$. Il vient $q^2 = 2p'^2$, de sorte que q^2 puis q sont pairs.

La contradiction cherchée est là : supposer A faux entraîne l'existence de deux entiers pairs p et q de parité distincte.

4. Le raisonnement par récurrence

Une des propriétés fondamentales de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est la suivante.

Propriété 3

Le principe de récurrence

Si A est une partie de $\mathbb{N}$ telle que $\quad 0 \in \mathbb{N}$ et $\forall n \in A,\ n+1 \in A \quad$ alors $A = \mathbb{N}$.

Cette propriété est admise comme un axiome.

La preuve «par récurrence» (10) d'une propriété $\mathcal{P}(n)$, pour tout $n \geqslant n_0$, repose sur ce principe.

Par exemple, si l'on sait que $\mathcal{P}\left(n_0\right)$ est vraie, ainsi que pour tout $n \geqslant n_0$ les implications $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$, l'ensemble $A = \left\{ k \in \mathbb{N} \,/\, \mathcal{P}\left(n_0 + k\right) \text{ est vraie} \right\}$ est, d'après le principe de récurrence, égal à $\mathbb{N}$, ce qui fait que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

(10) Lorsque $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, on dit que $\mathcal{P}$ est **initialisée** au rang n_0.
Lorsque les implications $\forall n \geqslant n_1,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ sont vraies, on dit que $\mathcal{P}$ est **héréditaire** à partir du rang n_1.
Pour conclure, par le principe de récurrence, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$, il faut s'assurer que $n_1 \leqslant n_0$.

Exemple 3 Justifions que, pour tout entier naturel n, $11^{n+1} - 10n - 11$ est un multiple de 100.

Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: $11^{n+1} - 10n - 11$ est multiple de 100.

- On constate immédiatement que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- On considère un entier $n \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, ce qui assure l'existence d'un entier k tel que $11^{n+1} - 10n - 11 = 100k$. Cela permet d'écrire :

$$11^{n+2} - 10(n+1) - 11 = 11(10n + 11 + 100k) - 10n - 21 = 100(n + 1 + 11k).$$

On conclut que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 4 Déterminons les entiers naturels n tels que $2n + 1 \leqslant 2^n$.

Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : 2n + 1 \leqslant 2^n$.

- On constate que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Étudions l'hérédité de $\mathcal{P}$ en considérant un entier $n \geqslant 0$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a donc $2n + 3 = (2n + 1) + 2 \leqslant 2^n + 2$, donc, **si** $n \geqslant 1$, il vient $2n + 3 \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Ainsi $\mathcal{P}$ est héréditaire à partir du rang 1.

- Cela amène à revoir l'initialisation. On constate que $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont fausses et que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, on conclut que les entiers naturels n pour lesquels $2n + 1 \leqslant 2^n$ sont 0 et les entiers $n \geqslant 3$.

De nombreuses variantes peuvent être envisagées. On distingue essentiellement les récurrences suivantes.

- **Les récurrences à deux pas** dont le schéma est le suivant :

initialisation : $\mathcal{P}\left(n_0\right)$ et $\mathcal{P}\left(n_0 + 1\right)$ sont vraies ;

hérédité : pour tout $n \geqslant n_0$, les implications $\left(\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)\right) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ sont vraies ;

le principe de récurrence permet alors de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

On peut aussi envisager des récurrences à p pas ($p \geqslant 1$ est fixé).

- **Les récurrences fortes**

initialisation : $\mathcal{P}\left(n_0\right)$ est vraie ;

hérédité : pour tout $n \geqslant n_0$, les implications $\left(\bigwedge_{k=n_0}^{n} \mathcal{P}(k)\right) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ sont vraies ;

le principe de récurrence permet, là aussi, de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarque

Ces variantes peuvent être reformulées en récurrence à un pas.

Dans le cas d'une récurrence à deux pas portant sur $\mathcal{P}$, il suffit de définir :

$$\mathcal{Q}(n) : \mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1).$$

Dans le cas d'une récurrence forte, on pose $\mathcal{Q}(n) : \bigwedge_{k=n_0}^{n} \mathcal{P}(k)$.

- **Les récurrences finies**

Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n tel que $n_0 \leqslant n \leqslant n_1$ (où $n_1 > n_0$) on pourra procéder comme suit :

initialisation : justifier que $\mathcal{P}\left(n_0\right)$ est vraie ;

hérédité : montrer que les implications $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ sont vraies pour tout n tel que $n_0 \leqslant n \leqslant n_1 - 1$.

5. Le raisonnement par analyse et synthèse

Pour résoudre un problème, on peut procéder par analyse et synthèse.

Dans la première partie du raisonnement, l'analyse, on suppose le problème résolu pour trouver des conditions nécessaires.

Dans la seconde partie du raisonnement, la synthèse, on examine si les conditions nécessaires obtenues sont suffisantes.

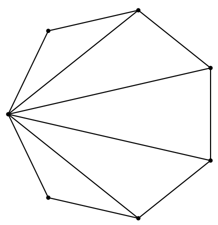
Dans ce type de raisonnement, l'analyse peut apporter un résultat d'unicité mais n'apporte pas un résultat d'existence. La synthèse peut apporter un résultat d'existence.

Exemple 5 Supposons que l'on veuille recouvrir le plan de carreaux ayant tous la même taille et la même forme : celle d'un polygone régulier convexe à n côtés ; les assemblages devront être identiques en chaque coin de chaque carreau.

Analyse

Supposons qu'un tel recouvrement du plan soit possible et notons p le nombre de polygones assemblés à chaque coin des carreaux. (11)

(11)



Un polygone convexe à n côtés peut être partagé en $n-2$ triangles ayant pour sommet commun l'un des sommets du polygone. Donc la somme des angles géométriques aux sommets d'un polygone vaut $(n-2)\pi$. On déduit que, dans un polygone régulier, l'angle géométrique en chaque sommet vaut $\dfrac{n-2}{n}\pi$.

Puisque p est le nombre de polygones assemblés en chaque coin d'un carreau, on a donc :

$$p\frac{n-2}{n}\pi = 2\pi \text{ c'est-à-dire } \frac{1}{p}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\,.$$

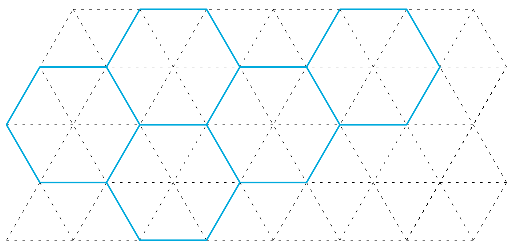
Les nombres p et n valent donc au moins 3 et on ne peut pas avoir $p \geqslant 5$ et $q \geqslant 5$. On a donc $p = 3$ et $n = 6$, ou $p = n = 4$, ou $p = 6$ et $n = 3$.

En conclusion, seuls trois pavages sont possibles :

- avec des triangles équilatéraux ($n = 3$, $p = 6$) ;
- avec des carrés ($n = 4$, $p = 4$) ;
- avec des hexagones réguliers ($n = 6$, $p = 3$).

Synthèse

On constate que les trois pavages obtenus permettent de recouvrir effectivement le plan.



B. Notions sur les ensembles

1. Vocabulaire et notations usuelles

(12) Les notions d'ensemble et de sous-ensemble (ou partie) d'un ensemble sont des notions premières.

Notation 3

Si E est un ensemble, on note $\varnothing$ la partie vide de (12) E.

$\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.

(13) «ou» n'est pas exclusif. Sinon, il faut préciser «ou bien».

Définition 4

Réunion de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E.

C'est le sous-ensemble, noté $A \cup B$, des éléments de E qui sont dans A **ou** dans B. (13)

Intersection de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E.

C'est le sous-ensemble, noté $A \cap B$, des éléments de E qui sont dans A **et** dans B.

Définition 5

Complémentaire d'un sous-ensemble A d'un ensemble E.

C'est le sous-ensemble, noté $\complement_E A$, [14] des éléments de E qui ne sont pas dans A.

[14] On le note aussi A^c ou $\overline{A}$ ou $E \setminus A$.

Définition 6

Différence de deux sous-ensembles A et B d'un ensemble E.

C'est le sous-ensemble $A \cap \overline{B}$, noté $A \setminus B$, des éléments de E qui sont à la fois dans A et en dehors de B.

Définition 7

Inclusion d'un ensemble ou d'un sous-ensemble dans un autre. [15] On dit que A est inclus dans B, et on note $A \subset B$, lorsque tout élément de A est élément de B.

$A = B$ équivaut à $(A \subset B \wedge B \subset A)$.

[15] $A \subset B$ équivaut à $A \setminus B = \varnothing$.

L'appartenance d'un élément x de E à un sous-ensemble A est notée $x \in A$.

La non-appartenance de x à A se note $x \notin A$; elle équivaut à $x \in A^C$.

2. Règles de calcul

Étant donné un ensemble E, on note A, B, C... des sous-ensembles de E.

Propriété 4

L'intersection :

a) est commutative : $A \cap B = B \cap A$ pour tout couple (A, B),

b) est associative : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ pour tout triplet (A, B, C),

c) admet E pour élément neutre : $A \cap E = E \cap A = A$ pour tout A. [16]

[16] E est le seul sous-ensemble admettant un symétrique pour $\cap$.

Propriété 5

La réunion :

a) est commutative : $A \cup B = B \cup A$ pour tout couple (A, B),

b) est associative : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ pour tout triplet (A, B, C),

c) admet $\varnothing$ pour élément neutre : $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ pour tout A. [17]

[17] $\varnothing$ est le seul sous-ensemble admettant un symétrique pour $\cup$.

Propriété 6

La réunion et l'intersection sont distributives l'une par rapport à l'autre.

Quels que soient A, B, C on a :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad , \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Propriété 7

Le passage au complémentaire :

a) est idempotent : $(A^C)^C = A$ pour tout A,

b) et $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ pour tout couple (A, B).

3. Familles d'ensembles

Définition 8

Soit I un ensemble non vide (ensemble des indices). À chaque $i \in I$, on associe un ensemble, noté E_i.
$(E_i)_{i\in I}$ est appelée **famille d'ensembles** indexée par I. ✎ (18)

✎ (18) Lorsque $I = \mathbb{N}$, $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ s'appelle une suite d'ensembles.

Lorsque I est un ensemble fini, on dit que $(E_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'ensembles.

Définition 9

Réunion d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble E.
$\bigcup\limits_{i\in I} X_i$ est la partie de E constitué des éléments qui appartiennent à un X_i. ✎ (19)

✎ (19) «un» est pris au sens de «un au moins».

Définition 10

Intersection d'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble E.
$\bigcap\limits_{i\in I} X_i$ est la partie de E constitué des éléments qui appartiennent à tous les X_i.

Définition 11

Partition d'un ensemble de E.
Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E est une partition de E lorsque :

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{i\in I} X_i = E \\ \text{pour tout couple } (i,j),\ i \neq j,\ X_i \cap X_j = \emptyset \\ \text{pour tout } i \in I,\ X_i \neq \emptyset. \end{cases}$$

Définition 12

Produit cartésien d'une famille d'ensembles.
Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles (ou de sous-ensembles d'un ensemble E).
On note $\prod\limits_{i\in I} X_i$ l'ensemble des familles $(x_i)_{i\in I}$ telles que : $\forall x \in I,\ x_i \in X_i$. ✎ (20)

✎ (20) $\prod\limits_{i\in I} X_i = \emptyset \iff (\exists i \in I,\ X_i = \emptyset)$.

<u>Cas particulier</u>

Lorsque tous les X_i sont égaux, et tous égaux à X, $\prod\limits_{i\in I} X_i$ est noté X^I.

C. Applications

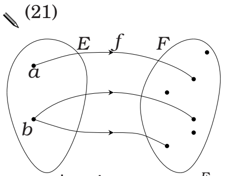
1. Définitions

Définition 13

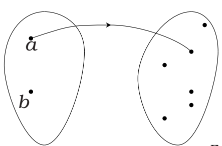
Étant donnés deux ensembles non vides E et F, une application de E dans F est un procédé f qui, à tout élément x de E, associe un unique élément de F, noté $f(x)$ et appelé image de x par f. On notera :

$$f\ :\ \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$ ✎ (21)

✎ (21)



b a deux images: $f \notin F^E$



b n'a pas d'image: $f \notin F^E$

Notation 4

L'ensemble des applications de E dans F est notée F^E.

Définition 14

Application identité

L'identité sur E, notée Id_E, est l'application de E dans E définie par $\forall x \in E,\ \mathrm{Id}_E(x) = x$.

Définition 15

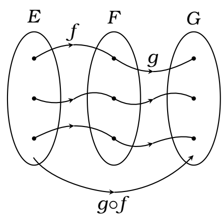
Soit E et F des ensembles et $f \in F^E$.

- Si A est une partie de E, la restriction de f à A est l'application :

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

- Si A est une partie de E et g une application de A dans F, on dit que f est un prolongement (ou une extension) de g à E si $f_{|A} = g$.

(22)



Définition 16

Composition d'applications

Soit F, G, H trois ensembles et f, g des applications, $f \in F^E$ et $g \in G^F$. (22)

La composée des applications f et g est l'application de E dans G, notée $g \circ f$, définie par :

$$\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

(23) Cette propriété est d'usage courant.

Propriété 8

La composition des applications est **associative.** (23)

Soit E, F, G, H des ensembles et soit $f \in F^E$, $g \in G^F$, $h \in G^H$; alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Notation 5

Soit n_0 un entier relatif. L'ensemble $\{n \in \mathbb{Z}, n \geqslant n_0\}$ est noté $[\![n_0, +\infty [\![$. Une application $[\![n_0, +\infty [\![\to E, n \to x_n$, où E est un ensemble non vide, s'appelle une suite à valeurs dans E, indexée à partir du rang n_0. On la note $\big(x_n\big)_{n \geqslant n_0}$.

Si $E = \mathbb{R}$, la suite $\big(x_n\big)_{n \geqslant n_0}$ est dite réelle.

2. Fonction caractéristique d'un sous-ensemble

(24) $\mathbb{1}_A$ appartient à l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$, noté $\{0,1\}^E$.

Définition 17

La **fonction caractéristique** d'une partie A d'un ensemble E est l'application : (24)

$$\mathbb{1}_A : E \to \mathbb{R}, \quad \begin{array}{ll} \mathbb{1}_A(x) = 1 & \text{quand} \quad x \in A \\ \mathbb{1}_A(x) = 0 & \text{quand} \quad x \in \overline{A} \end{array}$$

Propriété 9

Soit A et B deux parties d'un ensemble E.

L'égalité $\mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$ a lieu si et seulement si $A = B$.

Cela justifie l'expression «fonction caractéristique» d'un sous-ensemble.

Propriété 10

Quels que soient les sous-ensembles A et B de E, on a :

- $\mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$
- Si $A \cap B = \varnothing$, $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A\, \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.

Exemple 6 Condition nécessaire et suffisante pour que trois sous-ensembles A, B et C de E vérifient :

$$A \cap B = A \cap C \quad , \quad A \cup B = A \cup C.$$

Avec les fonctions caractéristiques des sous-ensembles A, B et C, les conditions se lisent :

$$\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C \quad , \quad \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A \mathbb{1}_C.$$

Ce qui implique $\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_C$ c'est-à-dire $B = C$, et cette condition nécessaire est évidemment suffisante.

Exemple 7 Preuve de la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion.

Soit A, B, C des sous-ensembles de E. Montrons que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} &= \mathbb{1}_{A\cap B} + \mathbb{1}_{A\cap C} - \mathbb{1}_{A\cap B}\mathbb{1}_{A\cap C} \\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_A\mathbb{1}_C - \mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C \\
&= \mathbb{1}_A\left(\mathbb{1}_B + \mathbb{1}_C - \mathbb{1}_B\mathbb{1}_C\right) \\
&= \mathbb{1}_A\mathbb{1}_{B\cup C} \\
\mathbb{1}_{(A\cap B)\cup(A\cap C)} &= \mathbb{1}_{A\cap(B\cup C)}.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

3. Image directe ou réciproque d'un sous-ensemble

Soit E et F deux ensembles, et $f \in F^E$ une application de E dans F.

Définition 18

Soit X un sous-ensemble de E. Le sous-ensemble de F défini par :

$$f(X) = \{y \in F,\ \exists x \in X,\ f(x) = y\}$$

est appelé l'**image de X par f**.

Définition 19

Soit Y un sous-ensemble de F. Le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(Y) = \{x \in E,\ f(x) \in Y\}$$

est appelé l'**image réciproque de Y** par f. ✎ (25)

✎ (25) La notation f^{-1} ne désigne l'application réciproque de f que si f est bijective ; voir à ce sujet la définition 23.

Remarques

1) Pour tout $x \in E$, $f\left(\{x\}\right)$ admet exactement un élément, par définition d'une application.
2) Soit A et B deux sous-ensembles de E. $A \subset B$ implique $f(A) \subset f(B)$.
3) Soit X et Y deux sous-ensembles de F. $X \subset Y$ implique $f^{-1}(X) \subset f^{-1}(Y)$.

Définition 20

Soit A et B des sous-ensembles de E et F respectivement. Étant donné $f \in F^E$ telle que $f(A) \subset B$, l'application de A dans B induite par f est l'application :

$$g : \begin{array}{ccc} A & \to & B \\ x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Définition 21

Soit E un ensemble et f une application de E dans lui-même.

a) Un sous-ensemble A de E est une **partie stable par** f lorsque $f(A) \subset A$.

b) Un sous-ensemble A de E est une **partie invariante par** f lorsque $f(A) = A$.

c) Soit $A \subset E$. L'**injection canonique** de A dans E est la restriction de Id_E à A.

Remarque

Soit E un ensemble et $f \in E^E$.

Si A est une partie de E stable par f, la donnée d'un élément x_0 de A permet de définir, par récurrence, une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ à valeurs dans A par la formule :

$$\forall n \geqslant 0,\ x_{n+1} = f(x_n).$$

4. Injection – Surjection – Bijection

Soit E et F deux ensembles et $f \in F^E$ une application de E dans F.

Définition 22

a) f est **injective** lorsque $\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \ \Rightarrow\ f(x) \neq f(y)$

ce qui équivaut à $\forall (x, y) \in E^2, f(x) = f(y) \ \Rightarrow\ x = y.$

b) f est **surjective** lorsque $\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x).$

c) f est **bijective** lorsque f est à la fois injective et surjective.

Remarques

1) f est injective si et seulement si , pour tout $y \in F, f^{-1}(\{y\})$ admet au plus un élément.

2) f est surjective si et seulement si , pour tout $y \in F, f^{-1}(\{y\})$ admet au moins un élément.

3) f est bijective si et seulement si , pour tout $y \in F, f^{-1}(\{y\})$ admet exactement un élément.

Exemple 8 Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on a :

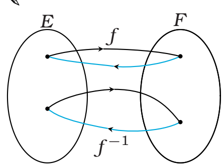
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), \quad \text{avec égalité si } f \text{ est injective.}$$

- De $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ on déduit $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$, ce qui donne l'inclusion demandée.
- Il reste à montrer que, si f est injective, $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Pour cela, soit $z \in f(A) \cap f(B)$; $\exists a \in A,\ z = f(a)$, $\exists b \in B,\ z = f(b)$.

De $f(a) = f(b)$, on déduit $a = b$, et cet élément appartient à $A \cap B$, ce qui montre que z appartient à $f(A \cap B)$.

(26)



Définition 23

Réciproque d'une application bijective (26)

L'application réciproque d'une application bijective f de E dans F est l'application de F dans E qui, à tout y de F, associe l'unique élément x de E tel que $y = f(x)$. On la note f^{-1}.

(27) Ce théorème est souvent utilisé.

Théorème 1

Soit E, F, G des ensembles et soit $f \in F^E$, $g \in G^F$. (27)

a) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

b) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

a) Soit x et y dans E tels que $f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$, donc : $g \circ f(x) = g \circ f(y)$. L'injectivité de $g \circ f$ donne $x = y$; ainsi f est injective.

b) Soit $z \in G$; la surjectivité de $g \circ f$ donne $\exists x \in E,\ z = g \circ f(x)$.

Alors $z = g(f(x))$ et $f(x) \in F$ montre que g est surjective.

(28) Dans ce cas, g est aussi bijective.

Propriété 11

Soit E, F deux ensembles et soit $f \in F^E$.

f bijective si et seulement si il existe $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$. (28)

a) La condition nécessaire découle de la définition de f^{-1}.
L'application réciproque f^{-1} vérifie $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$.
b) Condition suffisante : $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et Id_F surjective donne f surjective.
$g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et Id_E injective donne f injective. ✎ (29)

✎ (29) Mise en œuvre du théorème précédent.

Définition 24

Soit E un ensemble et $f \in E^E$.
On dit que f est **involutive** (ou est une **involution** de E) lorsque $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. ✎ (30)

✎ (30) Une involution de E est bijective et on a $f^{-1} = f$.

Propriété 12

Soit E, F, G trois ensembles.
a) La composée $g \circ f$ de deux injections $f \in F^E$ et $g \in G^F$ est injective (de E dans G).
b) La composée $g \circ f$ de deux surjections $f \in F^E$ et $g \in G^F$ est surjective (de E dans G).
c) La composée $g \circ f$ de deux bijections $f \in F^E$ et $g \in G^F$ est bijective (de E dans G) et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

a) Soit x et y dans E, $x \neq y$. Il s'ensuit $f(x) \neq f(y)$ car f est injective.
Avec l'injectivité de g, il vient $g\big(f(x)\big) \neq g\big(f(y)\big)$, c'est-à-dire $g \circ f(x) \neq g \circ f(y)$.
b) Soit $z \in G$. Alors $\exists y \in F$, $z = g(y)$ par surjectivité de g.
Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$ par surjectivité de f. On a donc $z = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x)$.
c) Le dernier point est un corollaire des premiers.

Notation 6

Pour deux ensembles E et F, $\mathcal{I}(E,F)$ désigne l'ensemble des injections de E dans F.

Propriété 13

Soit E, E', F, F' des ensembles.
On suppose que $\varphi \in F^E$ et $\psi \in F'^{E'}$ sont bijectives.
Alors l'application $F^E \to F'^{E'}$, $f \mapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ est une bijection qui induit une bijection de $\mathcal{I}(E,F)$ dans $\mathcal{I}\big(E',F'\big)$.

D. Dénombrement

Dans cette partie, la notion de cardinal est abordée de manière intuitive.

1. Cardinal d'un ensemble fini

Définition 25

Si E est un ensemble, son cardinal est le nombre de ses éléments ; c'est un entier ou $+\infty$, on le note $\mathrm{Card}\, E$. ✎ (31)
On dit que E est fini lorsque $\mathrm{Card}(E)$ est un entier ✎ (32) , sinon on dit que E est infini.

✎ (31) card $\varnothing$=0.

✎ (32) Si E est un ensemble de cardinal $n \geqslant 1$, on peut construire une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans E en énumérant ses éléments.

Théorème 2

Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $\mathrm{Card}\, A \leqslant \mathrm{Card}\, E$.
Si on a $\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, E$, alors $A = E$.

Corollaire 1

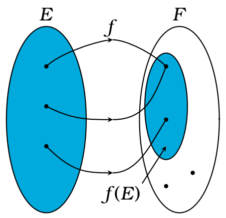
Toute intersection d'ensembles finis est un ensemble fini. ✎ (33)

✎ (33) Cette intersection est incluse dans un ensemble fini.

Corollaire 2

Soit f une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F. ✎ (34)
On a alors $\operatorname{Card} f(E) \leqslant \operatorname{Card} E$ et $\operatorname{Card} f(E) = \operatorname{Card} E$ si et seulement si f est injective.

✎ (34)



Corollaire 3

Si f est une surjection d'un ensemble fini E sur un ensemble F, alors : ✎ (35)

F est fini et $\operatorname{Card} F \leqslant \operatorname{Card} E$,

et on a $\operatorname{Card} F = \operatorname{Card} E$ si et seulement si f est bijective. ✎ (36)

✎ (35) Il suffit d'appliquer le corollaire 2 au cas où $F = f(E)$.

✎ (36) Pour montrer qu'un ensemble F est fini et pour calculer son cardinal n, il suffit d'exhiber une bijection d'un ensemble E, de cardinal n dans F.

Corollaire 4

Soit f une application injective d'un ensemble E dans un ensemble F.
Si $f(E)$ est fini, il en est de même pour E et $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} f(E)$.

Théorème 3

Soit E et F des ensembles finis de **même cardinal**. Si f est une application de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes : ✎ (37)

(1) f est injective,

(2) f est surjective,

(3) f est bijective.

✎ (37) Il suffit d'appliquer les résultats énoncés dans les corollaires précédents.
Il faut insister sur le fait que ce théorème ne peut s'appliquer que si les ensembles **finis** E et F ont le **même** cardinal.

Exemple 9 Le théorème ne s'étend pas aux ensembles infinis.

L'application $\left\{\begin{array}{cccc} f : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 2n \end{array}\right.$ est injective et non surjective.

L'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $\begin{cases} n \mapsto \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n \mapsto 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$ est surjective et non injective.

2. Réunion d'ensembles finis

Théorème 4

Si A, B sont des ensembles finis d'**intersection vide**, alors $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

☞ Soit n et p les cardinaux de A et B respectivement.
Il existe une bijection f de A sur $[\![1, n]\!]$ et une bijection g de B sur $[\![n+1, n+p]\!]$.
L'application h de $A \cup B$ dans $[\![1, n+p]\!]$, dont les restrictions à A et B sont respectivement f et g, est une bijection, donc $A \cup B$ est fini, de cardinal $n + p = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

Corollaire 1

Soit E un ensemble fini, $A \subset E$ et $\overline{A}$ son complémentaire dans E. On a :

$$\operatorname{Card} A + \operatorname{Card} \overline{A} = \operatorname{Card} E.$$

Corollaire 2

Si $(E_i)_{i \in [\![1, n]\!]}$ est une famille d'ensembles finis **deux à deux disjoints**, on a :

$$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Card} E_i.$$ ✎ (38)

✎ (38) On procède par récurrence sur n.

Corollaire 3

Soit A et B des ensembles finis. On a $\operatorname{Card}(A \cup B) + \operatorname{Card}(A \cap B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

☞ Les sous-ensembles $A \setminus B$, $A \cap B$ et $B \setminus A$ constituent une partition de $A \cup B$.
Le corollaire 2 donne $\operatorname{Card}(A \setminus B) + \operatorname{Card}(A \cap B) + \operatorname{Card}(B \setminus A) = \operatorname{Card}(A \cup B)$.
$A \setminus B$ et $A \cap B$ sont complémentaires dans A ; $B \setminus A$ et $A \cap B$ le sont dans B ; on a donc
$\operatorname{Card}(A \setminus B) + \operatorname{Card}(A \cap B) = \operatorname{Card} A$ et $\operatorname{Card}(B \setminus A) + \operatorname{Card}(A \cap B) = \operatorname{Card} B$.
Le résultat annoncé s'en déduit immédiatement.

Théorème 5

Si E, F sont des ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et $\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card} E \cdot \operatorname{Card} F$.

☞ Avec $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de cardinal n, on a $E \times F = \big(\{x_1\} \times F\big) \cup \ldots \cup \big(\{x_n\} \times F\big)$.
Pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \{x_i\} \times F & \to & F \\ (x_i, f) & \mapsto & f \end{array} \right.$ est une bijection. On a donc :

$$\operatorname{Card}(\{x_i\} \times F) = \operatorname{Card} F.$$

Les x_i, $i \in [\![1, n]\!]$, étant deux à deux distincts, les ensembles $\{x_i\} \times F$ sont deux à deux disjoints et il vient $\operatorname{Card}(E \times F) = n \operatorname{Card} F$.

Corollaire

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\operatorname{Card}\big(E^p\big) = (\operatorname{Card} E)^p$. ✎ [39]

✎ [39] On procède par récurrence sur p.

3. Applications d'un ensemble dans un autre

Théorème 6

Soit E et F des ensembles finis. L'ensemble F^E des applications de E dans F est fini, et :

$$\operatorname{Card}(F^E) = (\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}. \text{ ✎ [40]}$$

✎ [40] Ce résultat est cohérent avec la notation F^E.

☞ Soit $E = \{a_1, \ldots, a_p\}$ un ensemble fini de cardinal p.
L'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F^E & \to & F^p \\ f & \mapsto & \big(f(a_1), \ldots, f(a_p)\big) \end{array} \right.$ est une bijection.
On a donc $\operatorname{Card}(F^E) = \operatorname{Card}(F^p)$. Il vient alors ✎ [41] $\operatorname{Card}(F^E) = (\operatorname{Card} F)^p$.

✎ [41] Avec le corollaire du théorème 5.

Corollaire 1

Si E est de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre de ses sous-ensembles est 2^n.

☞ Cela résulte du fait que l'application $A \to \mathbb{1}_{|A}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\{0, 1\}^E$ est une bijection : tout $\varphi \in \{0, 1\}^E$ est la fonction caractéristique de l'unique sous-ensemble de E constitué des $x \in E$ tels que $\varphi(x) = 1$.

Théorème 7

Soient E et F des ensembles finis et non vides, de cardinal p et n respectivement.
L'ensemble (E, F) des injections de E dans F est fini et de cardinal :

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

☞ $\mathcal{I}(E,F)$ est une partie de l'ensemble fini F^E donc est fini. D'après la propriété 13, le cardinal A_n^p de $\mathcal{I}(E,F)$ ne dépend que de p et n.

- Du corollaire 2 du théorème 2, il découle que, si $p > n$, on a $A_n^p = 0$.
- Par ailleurs, en posant $E = \{a_1, \dots, a_p\}$, la bijection :

$$F^E \to F^p, f \mapsto \big(f(a_1), \dots, f(a_p)\big)$$

induit une bijection entre $\mathcal{I}(E,F)$ et l'ensemble $\wedge_p(F)$ des p-listes d'éléments deux à deux distincts de F. ✎ (42)

- Pour $n \geqslant 1$, on a donc $A_n^1 = n$.

Pour $2 \leqslant p \leqslant n$, on constate que la construction d'un élément de $\wedge_p(F)$ se fait en choisissant un élément x de F (de n façons possibles) et un élément de $\wedge_{p-1}\big(F \setminus \{x\}\big)$ (de A_{n-1}^{p-1} façons possibles). On a donc $A_n^p = n\,A_{n-1}^{p-1}$ et la formule annoncée en découle par récurrence.

✎ (42) Une p-liste d'éléments de F est un élément de F^p.
On dit aussi un p-uplet.

Corollaire 1

Si E est de cardinal n, le nombre de bijections de E sur lui-même est $n!$. ✎ (43)

✎ (43) Il y a donc $n!$ façons d'ordonner un ensemble de cardinal n.

☞ Les bijections (ou permutations) de E sont les injections de E dans E.
Avec $0! = 1$, il vient que ce nombre est $n!$.

4. Combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n ($n \in \mathbb{N}$).

Définition 26

Étant donné $p \in \mathbb{N}$, on appelle p-**combinaison** de E un sous-ensemble de cardinal p de E.

Le nombre de p-combinaisons de E est noté $\binom{n}{p}$. ✎ (44)

✎ (44) Notons $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des p-combinaisons de E. Le cardinal de $\mathcal{P}_p(E)$ ne dépend que de p et n.
En effet, si φ est une bijection entre E et un ensemble E' de cardinal n, la bijection :
$\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E'), X \mapsto \varphi(X)$
induit une bijection entre $\mathcal{P}_p(E)$ et $\mathcal{P}_p(E')$.

Cas particuliers

1) $\binom{n}{0} = 1$: $\varnothing$ est l'unique sous-ensemble de E ayant 0 pour cardinal.

2) Si $n \geqslant 1$, $\binom{n}{1} = n$: il y a n sous-ensembles de E de cardinal 1.

3) $\binom{n}{n} = 1$: E est l'unique sous-ensemble de E ayant n pour cardinal.

4) Si $p > n$, il n'y a pas de sous-ensemble de E de cardinal p. On a donc $\binom{n}{p} = 0$.

Propriété 14

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$. ✎ (45)

✎ (45) C'est la formule du triangle de Pascal : avec les égalités $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, elle permet le calcul des $\binom{n}{p}$ de proche en proche.
Premières lignes :

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

☞ Étant donné un ensemble E de cardinal n, on considère $a \in E$. Les sous-ensembles de E de cardinal p se partagent en deux sous-ensembles disjoints dans $\mathcal{P}(E)$: ceux qui contiennent a et ceux qui ne le contiennent pas.

Les premiers sont au nombre de $\binom{n-1}{p-1}$ et les seconds sont au nombre de $\binom{n-1}{p}$; le résultat en découle.

Propriété 15

Étant donné des entiers naturels n et p, avec $p \leqslant n$, on a $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

☞ L'application $A \mapsto E \setminus A$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$. Elle induit une bijection de l'ensemble des parties de cardinal p sur l'ensemble des parties de cardinal $n-p$.

Propriété 16

Étant donné des entiers naturels n et p, on a :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \text{ si } 0 \leqslant p \leqslant n \text{ et } \binom{n}{p} = 0 \text{ si } p > n.$$

La formule est vraie pour $p = 0$.

Pour $1 \leqslant p \leqslant n$, posons $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ et considérons l'application surjective :

$$f : \begin{array}{ccc} \wedge_p(E) & \to & \mathcal{P}_p(E) \\ (a_1, \dots, a_p) & \mapsto & \{a_1, \dots, a_p\} \end{array}$$

Chaque $X \in \mathcal{P}_p(E)$ admet $p!$ antécédants car il y a $p!$ façons d'ordonner un ensemble de cardinal p.

Comme les sous-ensembles $f^{-1}(X)$, $X \in \mathcal{P}_p(E)$, constituent une partition de $\wedge_p(E)$, on a $A_n^p = p!\binom{n}{p}$.

E. Relation binaire sur un ensemble

1. Vocabulaire et notations usuelles

Définition 27

Soit E un ensemble.

Une **relation binaire** $\mathcal{R}$ sur E est un sous-ensemble de $E \times E$.

$(x, y) \in E \times E$ vérifie la relation $\mathcal{R}$ si et seulement si $(x, y) \in \mathcal{R}$; on note alors $x \mathcal{R} y$.

Définition 28

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est

- **réflexive** lorsque : $\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x$,
- **symétrique** lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$,
- **antisymétrique** lorsque : $\forall (x, y) \in E^2, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$,
- **transitive** lorsque : $\forall (x, y, z) \in E^3, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$.

2. Relation d'équivalence

Définition 29

Une relation binaire sur un ensemble E est une relation d'équivalence sur E lorsqu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Définition 30

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

À tout élément x de E on associe sa classe d'équivalence définie par $c\ell(x) = \{y \in E\,;x \mathcal{R} y\}$.

Propriété 17

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, les classes d'équivalence forment une partition de E.

- Aucune classe d'équivalence n'est vide puisque $\forall x \in E,\ x \in c\ell(x)$.
- Deux classes d'équivalence distinctes sont disjointes. En effet, si $c\ell(x)$ et $c\ell(y)$ sont non disjointes, considérons $z \in c\ell(x) \cap c\ell(y)$. Il vient :

$$\forall t \in E,\ \ t \in c\ell(x) \iff t\,\mathcal{R}\,x \iff t\,\mathcal{R}\,z \iff t\,\mathcal{R}\,y \iff t \in c\ell(y)$$

de sorte que $c\ell(x) = c\ell(y) = c\ell(z)$.

Exemples

1) Soit a un réel non nul. On définit dans $\mathbb{R}$ la relation de congruence modulo a (46) par :

$$x \equiv y[a] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ x = y + ka.$$

2) Soit n un entier naturel non nul. On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation de congruence modulo n (47) par :

$$x \equiv y[n] \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ y = y + kn.$$

Dans les deux cas, la relation de congruence ainsi définie est une relation d'équivalence. Cela est dû au fait que tout entier admet un opposé et que $\mathbb{Z}$ est stable par addition.

(46) En trigonométrie, on utilise fréquemment les congruences modulo 2π ou π.

(47) En arithmétique, on utilise les congruences modulo tout entier $n \geqslant 1$.

3. Relation d'ordre

3.1 – Ordre total, ordre strict

Définition 31

Une relation binaire sur un ensemble E est une **relation d'ordre** sur E lorsqu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive. (48)

Une relation d'ordre $\leqslant$ sur E est dite relation d'**ordre total** et $(E, \leqslant)$ est dit ensemble **totalement ordonné** lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x\,;$$

sinon, l'ordre est dit partiel et $(E, \leqslant)$ est dit ensemble **partiellement ordonné**.

(48) On note souvent $\leqslant$ une telle relation d'ordre, quand il n'y a pas de risque de confusion avec une situation usuelle.

Définition 32

Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est appelée une relation d'ordre strict sur E lorsqu'elle est transitive et $x\,\mathcal{R}\,y$ implique $x \neq y$.

Exemple 10 Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.
La relation sur E définie par ($x \leqslant y$ et $x \neq y$) est une **relation d'ordre strict**, notée $<$.

Exemple 11
- Soit E un ensemble. L'ensemble $\mathcal{R}$ des couples $(A, B) \in \big(\mathcal{P}(E)\big)^2$ tels que $A \subset B$ est une relation d'ordre partiel sur E.
- Sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels non nuls, l'ensemble des couples (x, y) tels que «x divise y» (49) est une relation d'ordre partiel.

(49) «x divise y» si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y = nx$.

Propriété 18

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.
La relation $\{(x, y),\ y \leqslant x)\}$ est une relation d'ordre sur E, notée $\geqslant$.
La relation $\{(x, y),\ y < x\}$ est une relation d'ordre strict sur E, notée $>$.

3.2 – Éléments particuliers d'un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$

Définition 33

a) **Plus grand élément** : $a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ x \leqslant a$, noté $\max E$ (s'il existe).

b) **Plus petit élément** : $a \in E$ tel que $\forall x \in E,\ a \leqslant x$, noté $\min E$ (s'il existe). (50)

(50) Un ensemble ordonné E a **au plus** un plus grand (ou un plus petit) élément.

3.3 – Éléments associés à une partie d'un ensemble ordonné

(51) Si a est un majorant de A, tout $a' \in E$ tel que $a \leqslant a'$ est un majorant de A.

Définition 34

a) **Majorants** : $a \in E$ est un **majorant de** A lorsque $\forall x \in A,\ x \leqslant a$.
Si A admet un majorant, on dit que A est **majoré**. (51)

b) **Minorants** : $a \in E$ est un **minorant de** A lorsque $\forall x \in A,\ a \leqslant x$.
Si A admet un minorant, on dit que A est **minoré**.

(52) Si A a un plus grand élément a, alors $a = \sup A$.

(53) Si A a un plus petit élément a, alors $a = \inf A$.

Définition 35

a) **Borne supérieure** : si l'ensemble B des majorants de A est non vide et si B a un plus petit élément, M, celui-ci est appelé borne supérieure de A ; on note $M = \sup A$. (52)

b) **Borne inférieure** : si l'ensemble C des minorants de A est non vide et si C a un plus grand élément, m, celui-ci est appelé borne inférieure de A ; on note $m = \inf A$. (53)

Exemple 12 Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.
L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est muni de la relation d'ordre (partiel) inclusion : «$\subset$».
$\{A, B\}$ admet un plus petit élément si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$, et, dans ce cas, la borne inférieure de $\{A, B\}$ est A (si $A \subset B$).
Dans tous les cas, la borne inférieure de $\{A, B\}$ est $A \cap B$ et la borne supérieure est $A \cup B$.

3.4 – Applications monotones

(54) Une suite réelle $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante si $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \leqslant x_{n+1}$.

Définition 36

Soit $(E, \leqslant)$, $(F, \preceq)$ des ensembles ordonnés et φ une application de E dans F.

a) φ est **croissante** lorsque : $\forall (x, x') \in E \times E,\quad x \leqslant x' \Rightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(x')$, (54)
ou **décroissante** lorsque : $\forall (x, x') \in E \times E,\quad x \leqslant x' \Rightarrow \varphi(x) \succeq \varphi(x')$.

b) φ est **strictement croissante** lorsque : $\forall (x, x') \in E \times E,\quad x < x' \Rightarrow \varphi(x) \prec \varphi(x')$,
ou **strictement décroissante** lorsque : $\forall (x, x') \in E \times E,\quad x < x' \Rightarrow \varphi(x) \succ \varphi(x')$.

Définition 37

On dit que φ est **monotone** (resp. strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

3.5 – Applications à valeurs dans un ensemble ordonné

(55) Une suite réelle $(x_n)_{n \geqslant n_0}$ est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \geqslant n_0,\ x_n \leqslant M$.

Définition 38

Soit f une application d'un ensemble A dans un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$.

a) f **est majorée** quand $f(A) = \{x \in E, \exists a \in A,\ x = f(a)\}$ est majoré dans E. (55)
Si $f(A)$ a une borne supérieure dans E, on la note $\sup\limits_E f(A)$ ou $\sup f$.

b) f **est minorée** quand $f(A) = \{x \in E, \exists a \in A,\ x = f(a)\}$ est minoré dans E.
Si $f(A)$ a une borne inférieure dans E, on la note $\inf\limits_E f(A)$ ou $\inf f$.

(56) E^A désigne l'ensemble des applications de A dans E.
La relation d'ordre ainsi définie sur E^A est un ordre partiel en général, même si l'ordre sur E est total.

Définition 39

Soit A un ensemble non vide et soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.
Sur E^A, la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par : $f \,\mathcal{R}\, g$ si et seulement si $\big(\forall x \in A,\ f(x) \leqslant g(x)\big)$,
est une relation d'ordre, que l'on note aussi $\leqslant$. (56)

(57) $[a,b]$ est l'ensemble des $x \in E$ tels que $a \leqslant x \leqslant b$ ou $b \leqslant x \leqslant a$ selon que $a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.

Définition 40

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné.
Un **intervalle** de E est une partie X de E telle que : $\forall (a, b) \in X^2,\quad [a, b] \subset X$. (57)

L'essentiel

I. Schéma de démonstration

✔ **Si l'on veut** trouver comment démarrer un problème

- **on peut** utiliser un schéma $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.
  Le meilleur point de départ est souvent B : la propriété A est mise à contribution en cours de développement. Sa mise en œuvre au moment utile est le signe d'une démonstration efficace.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4
  - Attention, ce n'est pas le schéma $(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow C)$.

✔ Si A et B sont des propositions, alors $A \Rightarrow B$ en est une autre,

- mais rien ne dit qu'elle est vraie, pas plus qu'elle ne présuppose que A ou B soient vraies.

✔ **Si l'on veut** vérifier qu'une proposition est correctement rédigée

- **on peut** examiner si la proposition contraire peut s'écrire sans ambiguïté.

✔ **Si l'on veut** montrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour $n \geqslant n_0$,

- **on peut** démontrer $\mathcal{P}(n_0)$ et, suivant les circonstances, prouver :
  - $\forall n \geqslant n_0,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (récurrence simple),
  - $\left(\forall k \in [\![n_0, n]\!],\ \mathcal{P}(k)\right) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ (récurrence forte),
- **on peut** démontrer $\mathcal{P}\left(n_0\right)$ et $\mathcal{P}\left(n_0+1\right)$ et prouver :
  - $\forall n \geqslant n_0,\ \left(\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1)\right) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$ (récurrence double).
  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 1, 2 et 3

II. Calculs sur les ensembles

✔ **Si l'on veut** montrer l'égalité de deux ensembles A et B

- **on peut** utiliser les opérations usuelles entre ensembles pour établir que $A \subset B$ et $B \subset A$,
- **on peut** procéder analytiquement $x \in A \Rightarrow x \in B$ et $x \in B \Rightarrow x \in A$,
  - on peut panacher quand une inclusion est apparente d'un point de vue global et que l'autre mérite un traitement analytique,
  → Voir *Mise en œuvre*, exercice 4
- **on peut** montrer qu'une propriété caractérisant A est équivalente à une propriété caractérisant B,
- **on peut** montrer que leurs fonctions caractéristiques sont égales,
  - l'usage de fonctions caractéristiques transforme un calcul ensembliste (intersection, réunion, complémentaire...) en calcul algébrique.
  → Voir *Mise en œuvre*, exercices 5 et 6

Méthodes

III. Problèmes de dénombrement

✔ **Si l'on veut** traiter un problème de dénombrement

✔ la formule :

$$\mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B$$

est fondamentale,

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

✔ si E et E' sont deux ensembles finis et s'il existe une bijection de E dans E', alors :

$$\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, E'$$

→ Voir *Mise en œuvre*, exercice 7

✔ si E et E' sont des ensembles **finis de même cardinal** et si f est une application de E dans E', alors f est injective $\iff$ f surjective $\iff$ f bijective,

✔ $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties de cardinal p dans un ensemble de cardinal n. La formule du triangle de Pascal est :

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p}, \quad (p, n) \in \mathbb{N}^2.$$

Pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, avec $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

→ Voir *Mise en œuvre*, exercices 2, 8 et 9

Mise en œuvre

Ex. 1

Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Indications

Ces formules usuelles gagnent à être mémorisées. Il est à noter que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2$.

Solution

1) Soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

La propriété $\mathcal{P}(n)$ donne :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6}$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ et $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

2) Soit $\mathcal{Q}(n)$ la proposition $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; $\mathcal{Q}(1)$ est vraie.

Avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \sum_{k=1}^{n} k^3$, la propriété $\mathcal{Q}(n)$ donne :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = (n+1)^3 + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = (n+1)^2\left(n+1+\frac{n^2}{4}\right)$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$ et $\mathcal{Q}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n+1)$.

Commentaires

Preuve de $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$.

$\dfrac{(n+1)\big((n+1)+1\big)\big(2(n+1)+1\big)}{6}$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{0} k^3 = 0$: $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Preuve de $\mathcal{Q}(n) \Rightarrow \mathcal{Q}(n+1)$.

$\mathcal{Q}(n)$ vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Ex. 2

Justifier la propriété : pour n et p entiers, $n \geqslant p$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Indications

Démonstration par récurrence. Cette formule, à connaître, généralise la formule du triangle de Pascal.

Solution

Procédons par récurrence sur n.

La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = p$.

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p}.$$

On conclut avec la formule du triangle de Pascal.

Commentaires

p est fixé, quelconque.

Elle se lit $1=1$.

Utilisation de $\mathcal{P}(n)$.

$\dbinom{n+1}{p+1} + \dbinom{n+1}{p} = \dbinom{n+2}{p+1}$.

Ex. 3

La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

2) Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $F_{n+p} = F_pF_{n+1} - F_{p-1}F_n$.

Indications

Procéder par récurrence.

Solution

1) Avec $D_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$, on a $D_1 = -1$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $D_n = (-1)^n$.

On calcule
$$\begin{aligned} D_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= \left(F_{n+1} + F_n\right)F_n - \left(F_n + F_{n-1}\right)F_{n+1} \\ &= -D_n \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, on a donc $\forall n \geqslant 1$, $D_n = (-1)^n$.

2) Fixons un entier $p \geqslant 1$ et posons :
$$u_n = F_{n+p} - F_pF_{n+1} - F_{p-1}F_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Montrons, par une récurrence à deux pas, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$.

On a $u_0 = F_p - F_pF_1 - F_{p-1}F_0 = 0$,

et $u_1 = F_{p+1} - F_pF_1 - F_{p-1} = F_{p+1} - F_p - F_{p-1} = 0$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier tel que $u_{n-1} = u_n = 0$. On calcule :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= F_{n+p+1} - F_pF_{n+2} - F_{p-1}F_{n+1} \\ &= \left(F_{n+p} + F_{n+p-1}\right) - F_p\left(F_{n+1} + F_n\right) - F_{p-1}\left(F_n + F_{n-1}\right) \\ &= \left(F_{n+p} - F_pF_{n+1} - F_{p-1}F_n\right) \\ &\qquad + \left(F_{n+p-1} - F_pF_n - F_{p-1}F_{n-1}\right) \\ &= u_n + u_{n-1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, on a donc $\forall n \geqslant 0$, $u_n = 0$.
Cela démontre la formule annoncée.

Commentaires

La formule est initialisée aau rang 1.

La formule est héréditaire.

La récurrence est initialisée.

La propriété est héréditaire.

Ex. 4

On considère des ensembles E, F, G et une application φ de F dans G.

On considère l'application Γ de F^E dans G^E qui, à $f \in F^E$, associe $\varphi \circ f$.

1) Montrer que Γ est injective si et seulement si φ est injective.

2) Montrer que Γ est surjective si et seulement si φ est surjective.

Indications

Chaque question demande deux preuves : condition suffisante et condition nécessaire.

Dans les différents cas, reconnaître des schémas $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Le but est de décortiquer une méthode.

Par exemple, pour l'injectivité, le point de départ de la condition suffisante <u>n'est pas</u> «φ injective».

Solution

1) a) Supposons φ injective. Propositions :
$$A : \forall \left(y, y'\right) \in F^2,\ \varphi(y) = \varphi\left(y'\right) \ \Rightarrow\ y = y',$$
$$B : \forall \left(f, f'\right) \in F^E \times F^E,\ \Gamma(f) = \Gamma\left(f'\right)\ ;\quad C : f = f'.$$

Soit f et f' dans F^E telles que $\Gamma(f) = \Gamma\left(f'\right)$:
$$\forall x \in E,\ \ \varphi\left(f(x)\right) = \varphi\left(f'(x)\right).$$

Commentaires

Condition suffisante.

Mise en place de $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Point de départ : $\Gamma(f)=\Gamma(f')$.

$\varphi\circ f=\varphi\circ f'$.

Comme φ est injective, il vient $\forall x \in E, f(x) = f'(x)$, c'est-à-dire $f = f'$.

Hypothèse A dans $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$.

Ainsi, $\Gamma(f) = \Gamma(f') \Rightarrow f = f'$, et Γ est injective.

Moyennant A, on a $B \Rightarrow C$.

b) On suppose Γ injective.

Condition nécessaire.

On a encore un schéma $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$, avec

$A : \Gamma$ injective ; $B : \forall (y, y') \in E^2, \varphi(y) = \varphi(y')$; $C : y = y'$.

Soit $f : E \to F, \forall x \in E, f(x) = y$ et $f' : E \to F, \forall x \in E, f(x) = y'$.

On se met en mesure d'utiliser $\Gamma(f)=\Gamma(f')$.

$\varphi(y) = \varphi(y')$ se lit alors $\forall (x, x') \in E^2$, $\varphi \circ f(x) = \varphi \circ f(x')$, c'est-à-dire $\varphi \circ f = \varphi \circ f'$, ou encore $\Gamma(f) = \Gamma(f')$.

Point de départ : B.

L'injectivité de Γ donne $f = f'$, donc $y = y'$, d'où l'injectivité de φ.

f et f' sont les fonctions constantes égales à y et y'.

2) a) Condition suffisante : φ surjective.

Proposition A.

Soit $h \in G^E$. Pour tout $x \in E$, $h(x) \in G$: on choisit un antécédent $y_x \in F$ de $h(x)$ par φ, et on pose $f(x) = y_x$.

φ surjective.

On construit un antécédent de h par Γ.

$\forall x \in E$, $\varphi(y_x) = h(x)$ se lit $\Gamma(f) = h$, donc Γ est surjective.

$\varphi \circ f(x)=h(x)$.

b) On suppose Γ surjective.

Proposition A.

Le point de départ est B : $\forall z \in G$,

le but est C : $\exists y \in F, \varphi(y)=z$.

Pour tout $z \in G$, on considère la fonction $h_z \in G^E$ constante égale à z.

Γ étant surjective, h_z a un antécédent $f_z \in F^E$.

On a alors $\forall x \in E$, $z = h_z(x) = \varphi(f_z(x))$, d'où la surjectivité de φ.

$h_z=\Gamma(f_z)=\varphi \circ f_z$.

Ex. 5

Différence symétrique

Étant donné des sous-ensembles A et B d'un ensemble E, la différence symétrique de A et B est $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

On la note $A \triangle B$.

Former la fonction caractéristique de $A \triangle B$ et montrer que la différence symétrique est associative.

Indications

Mise en œuvre de fonctions caractéristiques, et on examine un exemple d'associativité.

Solution

1) La fonction caractéristique de $A \triangle B$ est :

$$\varphi_{A\triangle B} = \varphi_{A\setminus B} + \varphi_{B\setminus A} - \varphi_{A\setminus B}\varphi_{B\setminus A}$$
$$= \varphi_A - \varphi_A\,\varphi_B + \varphi_B - \varphi_B\,\varphi_A - (\varphi_A - \varphi_A\varphi_B)(\varphi_B - \varphi_B\varphi_A).$$

On en déduit alors $\varphi_{A\triangle B} = \varphi_A + \varphi_B - 2\,\varphi_A\,\varphi_B$.

Commentaires

$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ et $\varphi_{X\cup Y}$

avec $\varphi_{X\setminus Y}=\varphi_X-\varphi_X\varphi_Y$.

2) Associativité de la différence symétrique.

$$\varphi_{A\triangle(B\triangle C)} = \varphi_A + \varphi_{B\triangle C} - 2\,\varphi_A\,\varphi_{B\triangle c}$$
$$= \varphi_A + (\varphi_B + \varphi_C - 2\,\varphi_B\,\varphi_C) - 2\,\varphi_A\,(\varphi_B + \varphi_C - 2\,\varphi_B\,\varphi_C)$$
$$= \varphi_A + \varphi_B + \varphi_C - 2\,\varphi_B\,\varphi_C - 2\,\varphi_A\,\varphi_B - 2\,\varphi_A\,\varphi_C + 4\,\varphi_A\,\varphi_B\varphi_C$$

Par symétrie en A, B et C, on a : $\varphi_{A\triangle(B\triangle C)} = \varphi_{C\triangle(A\triangle B)}$

donc $A\triangle(B\triangle C) = C\triangle(A\triangle B)$ puis $A\triangle(B\triangle C) = (A\triangle B)\triangle C$.

Par commutativité.

Ex. 6

Vérifier que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \triangle B$.
Montrer que l'intersection est distributive par rapport à la différence symétrique.

Indications

Nouvelle mise en œuvre de fonctions caractéristiques, et on examine un exemple de distributivité.

Solution

1) Autre expression de $A \triangle B$:

$$\begin{aligned}\varphi_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} &= \varphi_{A\cup B}(1-\varphi_{A\cap B})\\ &= (\varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\varphi_B)(1-\varphi_A\varphi_B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} &= \varphi_A+\varphi_B-\varphi_A\,\varphi_B-\varphi_A\,\varphi_A\,\varphi_B-\varphi_B\,\varphi_A\,\varphi_B+\varphi_A\,\varphi_B\,\varphi_A\,\varphi_B\\ &= \varphi_A+\varphi_B-2\,\varphi_A\,\varphi_B=\varphi_{A\triangle B}.\end{aligned}$$

2) Distributivité de $\cap$ par rapport à $\triangle$:

$$\begin{aligned}\varphi_{(A\cap B)\triangle(A\cap C)} &= \varphi_{A\cap B}+\varphi_{A\cap C}-2\,\varphi_{A\cap B}\,\varphi_{A\cap C}\\ &= \varphi_A\,\varphi_B+\varphi_A\,\varphi_C-2\,\varphi_A\,\varphi_B\,\varphi_C\\ &= \varphi_A(\varphi_B+\varphi_C-2\,\varphi_B\,\varphi_C)\\ &= \varphi_A\,\varphi_{B\triangle C}=\varphi_{A\cap(B\triangle C)}\end{aligned}$$

Ce qui montre que $A\cap(B\triangle C)=(A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

Commentaires

$\varphi_{X\setminus Y}=\varphi_X(1-\varphi_Y)$.

Pour tout triplet (A,B,C).

Ex. 7

Montrer que, pour tous entiers naturels n, p, q :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}=\binom{p+q}{n}$.

Indications

1) Déterminer une partition de l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal n.

Solution

1) Soit E un ensemble de cardinal n. En notant $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E de cardinal k, $\left(\mathcal{P}_k(E)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une partition de $\mathcal{P}(E)$.

Donc $2^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

2) Considérons un ensemble de cardinal $p+q$ et deux parties disjointes de E, A et B, de cardinal p et q respectivement. Alors l'application :

$$\begin{array}{cccc}\varphi : & \mathcal{P}_n(E) & \to & \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n}\mathcal{P}_k(A)\times\mathcal{P}_{n-k}(B)\\ & X & \mapsto & (X\cap A, X\cap B)\end{array}$$ est une bijection.

On déduit que le cardinal $\binom{p+q}{n}$ de $\mathcal{P}_n(E)$ est celui de :

$$E'=\bigcup_{k=0}^{n}\mathcal{P}_k(A)\times\mathcal{P}_{n-k}(B).$$

Comme $\left(\mathcal{P}_k(A)\times\mathcal{P}_{n-k}(B)\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une partition de E' et :

$$\operatorname{Card}\left(\mathcal{P}_k(A)\times\mathcal{P}_{n-k}(B)\right)=\binom{p}{k}\binom{q}{n-k},$$

on déduit la formule annoncée.

Commentaires

Avec $\operatorname{Card}\mathcal{P}(E)=2^n$ et $\operatorname{Card}\mathcal{P}_k(E)=\binom{n}{k}$.

Avec $\operatorname{Card} A\cap B=0$ et $\operatorname{Card} A+\operatorname{Card} B=\operatorname{Card} E$ on a $E=A\cup B$. On a donc pour $X\in\mathcal{P}_n(E)$, $X=(X\cap A)\cup(X\cap B)$.
Cela montre que φ est injective.
Avec $(Y,Z)\in\mathcal{P}_k(A)\times\mathcal{P}_{n-k}(B)$ et $X=Y\cup Z$, $A\cap B\neq\varnothing$ donne $Y\cap Z\neq\varnothing$ donc $\operatorname{Card} X=n$ et $\varphi(X)=(Y,Z)$. Cela montre que φ est surjective.

Ex. 8

Pour $n \in \mathbb{N}$, quel est le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers naturels tels que $a \leqslant b \leqslant c$ et $a + b + c = n$.

Indications

Si on n'impose pas $a \leqslant b \leqslant c$, le problème est aisé. Sous cette condition, on peut poser $a = x$, $b = x + y$, $c = x + y + z$, avec x, y, z dans $\mathbb{N}$.

Solution

1) Trouver le nombre de triplets (a, b, c) d'entiers naturels tels que $a + b + c = n$ se résume en $\underbrace{|\ldots|}_{a} + \underbrace{|\ldots|}_{b} + \underbrace{|\ldots|}_{c} = n$.

Avec les signes +, il y a $n + 2$ cases, il y a donc $\binom{n+2}{2}$ solutions.

2) La condition $a \leqslant b \leqslant c$ conduit à poser $a = x$, $b = x+y$ et $c = x+y+z$. La question devient alors : trouver les triplets (x, y, z) d'entiers naturels tels que $3x + 2y + z = n$.

3) Les solutions dans $\mathbb{N}$ de $z+2y = n$ sont au nombre de $S_n = 1+E\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Soit T_n le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de $z + 2y + 3x = n$.

Celles où $x = 0$, c'est-à-dire $z + 2y = n$ sont au nombre de S_n.

Pour $x > 0$, la propriété s'écrit $3(x - 1) + 2y + z = n - 3$, donc $T_n = S_n + T_{n-3}$ puis $T_n = S_n + S_{n-3} + T_{n-6}$.

On établit aisément $S_n + S_{n-3} = n$ et par suite $T_n = n + T_{n-6}$.

On vérifie que $T_0 = 1$, et $T_r = r$ pour $r \in [\![1, 5]\!]$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $n = 6q + r$, $0 \leqslant r \leqslant 5$.

À partir de $T_{6k+r} - T_{6(k-1)+r} = 6k + r$, il vient :

$$T_n - T_r = \sum_{k=1}^{q} \left(T_{6k+r} - T_{6(k-1)+r}\right) = qr + 6\sum_{k=1}^{q} k = qr + 3q(q+1)$$

donc $T_n = (q + 1)(3q + r)$.

Commentaires

On n'impose pas $a \leqslant b \leqslant c$.

Le problème est de placer les deux signes + dans ces $n+2$ cases.

Avec x, y, z dans $\mathbb{N}$.

$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

Pour $0 \leqslant y \leqslant E\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ il y a un z.

Il y a T_{n-3} solutions.

En distinguant n pair et n impair.

Par exemple, pour $n=5$, les solutions (x,y,z) sont $(0,0,5)$, $(0,1,3)$, $(0,2,1)$, $(1,0,2)$ et $(1,1,0)$.

T_n se calcule avec q, r et T_r, $0 \leqslant r \leqslant 5$.

Ex. 9

Étant donné n et p dans $\mathbb{N}^*$ et un ensemble E de cardinal np, combien existe-t-il de partitions en sous-ensembles ayant tous le même cardinal p ?

Indications

Une partition est une famille de sous-ensembles non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion est E. Un changement d'ordre donne une nouvelle partition.

Solution

Soit A_n le nombre de partitions demandé.

Si E est de cardinal $(n + 1)p$, on choisit une partie F de cardinal p.

$E \setminus F$ est de cardinal np, et admet A_n partitions en parties de cardinal p.

On a donc $A_{n+1} = A_n \binom{(n+1)p}{p}$ et il s'ensuit $A_n = \prod_{k=1}^{n} \binom{kn}{p}$.

Expression réduite : $A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(kp)!}{p!\big((k-1)p\big)!} = \frac{(np)!}{(p!)^n}$.

Commentaires

Récurrence sur n avec p fixé quelconque.

Il y a $\binom{(n+1)p}{p}$ choix possibles.

Une partition de E est $(F, F_1, \cdots, F_n)$ où $(F_1, \ldots, F_n)$ est une partition de $E \setminus F$.

$A_1=1$.

Il reste à diviser par $n!$ si on ne tient pas compte de l'ordre des termes des partitions.

Exercices

Niveau 1

Logique

Ex. 1

Exprimer en langage courant la proposition :

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$$

et les analogues en changeant les quantificateurs. Quelles sont celles qui sont vraies ?

Ex. 2

$A : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$; $B : (P \text{ et } Q) \Rightarrow R$; $C : P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$; $D : (P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)$.

Y a-t-il, parmi A, B, C et D, des propositions qui sont équivalentes ?

Ensembles – Applications

Ex. 3

Montrer que $A \cap B = A \cup B$ équivaut à $A = B$.

Ex. 4

Montrer que $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

Donner un contre-exemple pour l'inclusion contraire.

Ex. 5

Soit A, B, C des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $A \cap B = A \cap C \iff A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C$.

Ex. 6

Soit E, F et G des ensembles, et $f \in F^E$, $g \in G^F$, $h = g \circ f$. Montrer que :

1) h surjective et g injective $\Rightarrow f$ surjective ;

2) h injective et f surjective $\Rightarrow g$ injective.

Ex. 7 @

Soit E, F, G des ensembles et $f \in F^E$, $g \in G^F$, $h \in H^G$. Montrer que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives si et seulement si f, g et h le sont.

Ex. 8

Soit $f \in F^E$. Montrer que $\forall (A \times B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ implique que f est injective.

Ex. 9

Étant donné E non vide et A, B dans $\mathcal{P}(E)$, montrer que $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E), X \mapsto (X \cup A, X \cup B)$ n'est pas surjective.

Dénombrement

Ex. 10

Combien un village doit-il compter d'habitants pour que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Ex. 11

Soit E et F des ensembles finis, de cardinaux respectifs n et p. Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Ex. 12

Combien y a-t-il de surjections d'un ensemble de cardinal $n + 1$ dans un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$?

Ex. 13 @

Résoudre :

1) $y \in \mathbb{N}$, $\binom{1}{y} + \binom{2}{y} + \binom{3}{y} = 5y$.

2) $n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4}$.

Ex. 14

Étant donné des ensembles finis E, F, G, montrer que :

$$\begin{aligned}\operatorname{Card}(E \cup F \cup G) &= \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F + \operatorname{Card} G + \operatorname{Card}(E \cap F \cap G)\\ &\quad - \operatorname{Card}(E \cap F) - \operatorname{Card}(F \cap G) - \operatorname{Card}(G \cap E).\end{aligned}$$

Relations binaires

Ex. 15 @

Soit $\mathcal{R}$ une relation linéaire dans un ensemble E. On définit les relations binaires $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ par :

$$x \mathcal{S} y \iff (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x),$$

$$x \mathcal{A} y \iff (x \mathcal{R} y \text{ et } y \not\mathcal{R} x).$$

1) Montrer que $\mathcal{S}$ est symétrique et $\mathcal{A}$ antisymétrique.

2) Montrer que si $\mathcal{R}$ est transitive alors $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont transitives. Montrer que la réciproque est fausse.

Ex. 16

On munit $\mathbb{R}^2$ de la relation d'ordre :

$$(x, y) \mathcal{R} (x', y') \iff (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y').$$

On pose $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 1\}$.

1) $\mathcal{R}$ est-il total ?

2) Un point C de $\mathcal{C}$ est dit maximal dans $\mathcal{C}$ si :

$$\forall M \in \mathcal{C},\ C \mathcal{R} M \Rightarrow M = C.$$

a) Déterminer les éléments maximaux de $\mathcal{C}$.

b) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une borne supérieure et la déterminer.

Niveau 2

Ex. 17

Soit X, Y et Z trois sous-ensembles d'un ensemble E.

Montrer que : $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$,

et que : $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

Ex. 18

1) On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Que peut-on dire de B et C ?

2) Même question relative à B et C lorsque :

$$A \cap B \subset A \cap C \quad \text{et} \quad A \cup B \subset A \cup C.$$

Ex. 19

Soit $f \in F^E$ et $Y \subset F$. Montrer que :

$$f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y \cap f(E)$$

et que, si f est surjective, $f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$.

Ex. 20 @

Simplifier les expressions suivantes :

1) $X \cap \left(\overline{X} \cup Y\right)$,

2) $X \cup \left(\overline{X} \cap Y\right)$,

3) $X \cap \left(\overline{X} \cup Y\right) \cap \left(\overline{X} \cup \overline{Y} \cup Z\right)$,

4) $X \cup \left(\overline{X} \cap Y\right) \cup \left(\overline{X} \cap \overline{Y} \cap Z\right)$.

Ex. 21

Soit E un ensemble et $A \subset E$. On considère les applications :

$$f \;:\; \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad X \mapsto A \cap X$$
$$g \;:\; \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E), \quad X \mapsto A \cup X.$$

1) Déterminer les images de $\mathcal{P}(E)$ par f et par g.

2) Pour $Y \in \mathcal{P}(E)$, déterminer $f^{-1}(Y)$ et $g^{-1}(Y)$.

Ex. 22

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.

Montrer que $\displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X = n2^{n-1}$.

Niveau 3

Ex. 23

Soit A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E.

Quand est-il vrai que $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$?

Ex. 24

Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective d'un ensemble E sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

Pour une application f de E dans $\mathcal{P}(E)$, on pourra considérer : $A_f = \{x \in E, x \notin f(x)\}$.

Ex. 25

Soit E et F deux ensembles ; on suppose qu'il existe $f \in F^E$ injective et $g \in E^F$ injective.

1) Montrer que $\mathcal{X}$ est non vide, avec :

$$\mathcal{X} = \left\{A \in \mathcal{P}(E) \;/\; g\left(F \setminus f(A)\right) \subset E \setminus A\right\}.$$

2) Montrer que $\mathcal{X}$ admet un plus grand élément (pour l'inclusion), noté B.

3) Montrer que $g\left(F \setminus f(B)\right) = E \setminus B$.

4) En déduire qu'il existe une bijection de E vers F.

Ex. 26

Soit E, F deux ensembles et soit f une application de E dans F. Montrer que f est bijective si et seulement si

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), f\left(\complement_E A\right) = \complement_F f(A).$$

Ex. 27

Montrer que $f \in F^E$ est injective si et seulement si, pour tout ensemble D,

$$\forall (g, h) \in E^D \times E^D, f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h.$$

Ex. 28

Soit un ensemble E, des sous-ensembles A et B de E, et $f \;:\; \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$, $X \mapsto (X \cap A,\, X \cap B)$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur A et B, pour que f soit injective.

2) Même question pour f surjective.

Ex. 29 @

Étant donné des ensembles E, F, et $f \in F^E$, montrer que pour tous sous-ensembles Y, Y_1 et Y_2 de F,

1) $Y_1 \subset Y_2 \Rightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$,

2) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$,

3) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$,

4) $f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y \cap f(E)$,

5) $f^{-1}(Y_1 \setminus Y_2) = f^{-1}(Y_1) \setminus f^{-1}(Y_2)$.

Ex. 30

1) Soit n, p, q dans $\mathbb{N}$, $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$. Montrer que :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \iff p = q \text{ ou } p + q = n.$$

2) Résoudre l'équation :

$$\binom{2n+4}{3n-1} = \binom{2n+4}{n^2 - 2n + 3}.$$

Ex. 31

Calculer $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X\cap Y)$

et $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X\cup Y)$.

Ex. 32

Soit E un ensemble de cardinal n. Quel est le nombre de partitions de E en deux parties ? en trois parties ?

Ex. 33

Étant donné une famille $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ d'ensembles, montrer que le cardinal de leur réunion est égal à :

$$\sum_{k=1}^{p}\operatorname{Card} A_k - \sum_{k<r}\operatorname{Card}(A_k\cap A_r) +$$

$$\sum_{k<r<s}\operatorname{Card}(A_k\cap A_r\cap A_s)+\ldots+(-1)^{p+1}\operatorname{Card}\bigcap_{k=1}^{p}A_k\,.$$

Indications

Ex. 17

1) Définition d'une différence, complémentaire d'une intersection, et distributivité de l'intersection par rapport à la réunion.

2) Même démarche, l'intersection étant distributive par rapport à elle-même.

Ex. 18

Utiliser les deux méthodes : calcul ensembliste et fonctions caractéristiques. C'est une bonne occasion de comparer leurs performances.

Ex. 19

Ne pas oublier que $x\in f^{-1}(Y)$ ne veut rien dire d'autre que $f(x)\in Y$.

Ex. 21

1) $f(X)\subset A$ et $g(X)\supset A$.

2) Distinguer $Y\cap\overline{A}\neq\varnothing$ et $Y\subset A$.

Distinguer $Y\supset A$ et son contraire.

Ex. 22

On peut utiliser la bijection $X\mapsto\overline{X}$.

Ex. 23

Utiliser les fonctions caractéristiques de sous-ensembles.

Ex. 24

Si f est surjective, il existe $a\in E$ tel que $f(a)=A_f$.

Mettre en évidence une contradiction.

Ex. 25

1) Vérifier que $\varnothing\in\mathcal{X}$.

2) Considérer $B=\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{X}}A$.

3) Soit $x\in E\setminus B$, $x\notin g\big(F\setminus f(B)\big)$.

Montrer que $B'=B\cup\{x\}$ est dans $\mathcal{X}$.

Ex. 26

1) En supposant $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$, considérer $f(\overline{E})$ et $f(\{x\})$, $f(\{y\})$ pour $x\neq y$.

2) Si f est bijective, appliquer la propriété à $g=f^{-1}$.

Ex. 27

1) Simple exploitation de l'injectivité.

2) Si $f(x)=f(x')$, utiliser

$$D=\{z\}\text{ et }g(z)=x,\ h(z)=x'.$$

Ex. 28

1) Si f est injective, comparer $f(E)$ et $f(A \cap B)$.

2) Si f est surjective, il existe X tel que $f(X) = (A, \varnothing)$.

Ex. 30

1) Développer $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ lorsque $p < q$ par exemple, et comparer des produits d'entiers consécutifs.

2) Ne pas oublier, dans $\binom{x}{y}$, de comparer x et y.

Ex. 31

Exploiter la bijection $X \mapsto \overline{X}$ pour comparer les sommes des cardinaux des $X \cap Y$, $\overline{X} \cap Y$, $X \cap \overline{Y}$ et $\overline{X} \cap \overline{Y}$.

Pour obtenir la seconde somme, étudier d'abord la somme des deux.

Ex. 32

1) $(X, \overline{X})$ est une partition pour $X \neq \varnothing$ et $X \neq E$.

2) Établir une relation de récurrence entre K_n et K_{n-1}, où K_n est le nombre de partitions de E en trois sous-ensembles.

Ex. 33

C'est la formule du crible dont un cas particulier ($p = 3$) fait l'objet de l'exercice 14. Procéder par récurrence sur p. Le cardinal de la réunion de deux ensembles est évidemment exploité.

Solutions des exercices

Niveau 1

Ex. 1

1) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$: tout x est divisible par tout y, faux.

2) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$: il y a un x divisible par tout y, vrai ($x = 0$).

3) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$: il y a un y qui divise tout x, vrai ($y = 1$).

4) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \exists z \in \mathbb{N},\ x = yz$: il y a un x divisible par un y, vrai.

5) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ x = yz$: tout z est le quotient de tout x par tout y, faux.

6) $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ x = yz$: il existe un x tel que tout z est le quotient de x par tout y, faux.

7) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ x = yz$: il existe un y tel que tout z est le quotient de tout x par y, faux.

8) $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{N},\ x = yz$: il existe x et y tel que tout z est le quotient de x par y, vrai ($x = y = 0$).

Ex. 2

Les propositions B et C sont équivalentes ; elles s'expriment par (non P) ou (non Q) ou R.

Ex. 3

1) Première solution : ensembliste. Si $A = B$, on a $A \cup A = A = A \cap A$.
$A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B$ donne $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, d'où $A \subset B$; symétriquement, $B \subset A$, d'où $A = B$.

2) Seconde solution : avec les fonctions caractéristiques. $A \cup B = A \cap B$ équivaut à $\varphi_A\varphi_B = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A\varphi_B$, c'est-à-dire $\varphi_A + \varphi_B - 2\,\varphi_A\,\varphi_B = 0$, ou encore $\varphi_A^2 + \varphi_B^2 - 2\,\varphi_A\,\varphi_B = 0$, soit aussi $(\varphi_A - \varphi_B)^2 = 0$, et enfin $\varphi_A - \varphi_B = 0$. Alors $\varphi_A = \varphi_B$ exprime que $A = B$.

Ex. 4

$A \cup (B \setminus C) = A \cup (B \cap \overline{C}) \supset B \cap \overline{C}$.

$(A \cup B) \setminus (A \cup C) = (A \cup B) \cap \overline{A \cup C} = (A \cup B) \cap \overline{A} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) = B \cap \overline{A} \cap \overline{C} \subset B \cap \overline{C}$.

Par transitivité de l'inclusion, il vient $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

Avec $A = B = C$ non vide, on a $A \cup (A \setminus A) = A \cup \varnothing = A$ alors que $(A \cup A) \setminus (A \cup A) = A \setminus A = \varnothing$.

Ex. 5

Avec les fonctions caractéristiques, $A \cap \complement_E B = A \cap \complement_E C$ se lit $\varphi_A(1 - \varphi_B) = \varphi_A(1 - \varphi_C)$, ce qui équivaut à $\varphi_A\varphi_B = \varphi_A\varphi_C$, c'est-à-dire $A \cap B = A \cap C$.

Ex. 6

On utilise le théorème 1, relatif à $g \circ f$ injective ou surjective.

1) On a g surjective, donc bijective. $f = g^{-1} \circ h$ est surjective comme composée de surjections.

2) f est injective, donc bijective. $g = h \circ g^{-1}$ est injective comme composée d'injections.

Ex. 8

Soit a et b dans E, avec $a \neq b$. On a donc $\{a\} \cap \{b\} = \varnothing$.

Il s'ensuit $f\big(\{a\}\big) \cap f\big(\{b\}\big) = \varnothing$, c'est-à-dire $\{f(a)\} \cap \{f(b)\} = \varnothing$, ou encore $f(a) \neq f(b)$.

Ex. 9

Si f est surjective, $(\varnothing, \varnothing)$ a un antécédent C : $A \cup C = \varnothing$ et $B \cup C = \varnothing$, donc $A = B = \varnothing$.
Alors, pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, on a $f(X) = (X, X)$ et $(E, \varnothing)$ n'a pas d'antécédent.
Ainsi, $(\varnothing, \varnothing)$ ou $(E, \varnothing)$ n'a pas d'antécédent et f n'est pas surjective.

Ex. 10

On utilise l'alphabet A usuel, $\operatorname{Card} A = 26$. On ne prend pas en compte les prénoms ou noms composés.
Les initiales sont des éléments de A^2. Le nombre d'initiales possibles est $\operatorname{Card} A^2 = 26^2 = 676$.
Deux personnes au moins ont les mêmes initiales dès que le village comporte au moins 677 habitants.

Ex. 11

L'existence d'injection de E dans F rend nécessaire la condition $n \leqslant p$.
Une injection de E dans F est caractérisée par un sous-ensemble B de F, $\operatorname{Card} B = n$, et une bijection de E dans B.
Le nombre d'injections est alors $n!\binom{p}{n}$.

Ex. 12

Soit $E = [\![1, n+1]\!]$ et $F = [\![1, n]\!]$. Une application de E dans F est surjective si et seulement si il existe un élément et un seul de F qui ait deux antécédents exactement. Les autres ont alors un antécédent et un seul.
La méthode en découle : choix d'un élément y de F, choix de deux antécédents u, v, dans E et choix d'une bijection de $E \setminus \{u, v\}$ dans $F \setminus \{y\}$. Le nombre de surjections est alors :

$$n \times \binom{n+1}{2} \times (n-1)!, \text{ c'est-à-dire } \frac{n(n+1)!}{2}.$$

Ex. 14

$\operatorname{Card}\big((E \cup F) \cup G\big) = \operatorname{Card}(E \cup F) + \operatorname{Card} G - \operatorname{Card}\big((E \cup F) \cap G\big)$.
$\operatorname{Card}(E \cup F) = \operatorname{Card} E + \operatorname{Card} F - \operatorname{Card}(E \cap F)$.
Avec $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ et $(E \cap G) \cap (F \cap G) = E \cap F \cap G$, on a :

$$\operatorname{Card}\big((E \cup F) \cap G\big) = \operatorname{Card}(E \cap G) + \operatorname{Card}(F \cap G) - \operatorname{Card}(E \cap F \cap G).$$

Ex. 16

1) Pour $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble $M(P)$ des majorants de P est le quart de plan défini par les inégalités $x \geqslant a$ et $y \geqslant b$. Et l'ensemble $m(P)$ des minorants de P est le quart du plan défini par les inégalités $x \leqslant a$ et $y \leqslant b$.
L'ordre ainsi induit dans $\mathbb{R}^2$ est donc partiel.

2) a) Soit $P = (a, b) \in \mathcal{C}$.
Si $a < 0$, $M(P)$ contient $(0, 1)$: P n'est pas maximal.
Si $b < 0$, $M(P)$ contient $(1, 0)$: P n'est pas maximal.
Si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, on a $\mathcal{C} \cap M(P) = \{P\}$ puisque C et $M(P)$ sont séparés par la tangente à $\mathcal{C}$ en P. Donc P est maximal.
L'ensemble des points maximaux de $\mathcal{C}$ est donc le quart de cercle $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.
b) L'ensemble des majorants des points de $\mathcal{C}$ est contenu dans $M\big((1,0)\big) \cap M\big((0,1)\big) = M\big((1,1)\big)$.
De plus, $(a, b) \in C \;\Rightarrow\; a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1 \;\Rightarrow\; (a, b)\,\mathcal{R}\,(1, 1)$.
L'ensemble des majorants des points de $\mathcal{C}$ est donc $M(1, 1)$. $\mathcal{C}$ admet donc $(1, 1)$ pour borne supérieure.

Niveau 2

Ex. 17

1) Les règles de calcul relatives à l'intersection, la réunion et au complémentaire donnent successivement :

$$X \setminus (Y \cap Z) = X \cap \left(\overline{Y \cap Z}\right) = X \cap \left(\overline{Y} \cup \overline{Z}\right) = \left(X \cap \overline{Y}\right) \cup \left(X \cap \overline{Z}\right) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

2) On obtient de même : $X \setminus (Y \cup Z) = X \cap \left(\overline{Y} \cap \overline{Z}\right) = \left(X \cap \overline{Y}\right) \cap \left(X \cap \overline{Z}\right) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$.

Ex. 18

1) Avec les opérations sur les sous-ensembles.

$B = B \cup (A \cap B) = B \cup (A \cap C) = (B \cup A) \cap (B \cup C)$ avec la première hypothèse et la distributivité ; puis $B = (A \cup C) \cap (B \cup C) = C \cup (A \cap B)$ avec la deuxième hypothèse et la distributivité ; et enfin $B = C \cup (A \cap C) = C$ avec la première hypothèse.

(Autre départ : $B = B \cap (A \cup B) \ldots$).

Autre méthode : avec les fonctions caractéristiques.

2) $A \cup B \subset A \cup C \iff (A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup B \iff A \cup (B \cap C) = A \cup B$ et

$A \cap B \subset A \cap C \iff (A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap B \iff A \cap (B \cap C) = A \cap B$.

La première question donne alors $B \cap C = B$ c'est-à-dire $B \subset C$.

Autre méthode : avec les fonctions caractéristiques.

$\varphi_A \varphi_B \leqslant \varphi_A \varphi_C$ et $\varphi_A + \varphi_B - \varphi_A \varphi_B \leqslant \varphi_A + \varphi_C - \varphi_A \varphi_C$ équivaut à $\varphi_A(\varphi_B - \varphi_C) \leqslant 0$ et $(1 - \varphi_A)(\varphi_B - \varphi_C) \leqslant 0$, c'est-à-dire $\varphi_B \leqslant \varphi_C$; ce qui équivaut à $B \subset C$.

Ex. 19

1) On a $f^{-1}(Y) \subset E$, donc $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset f(E)$.

Soit $x \in f^{-1}(Y)$, on a donc $f(x) \in Y$ et par suite, $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y$.

En conséquence, $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subset Y \cap f(E)$.

2) Soit $y \in f(E) \cap Y$.

Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et, puisque $y \in Y$, on a $x \in f^{-1}(Y)$, donc $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(Y)\right)$. En conséquence, $f(E) \cap Y \subset f\left(f^{-1}(Y)\right)$ et enfin $Y \cap f(E) = f\left(f^{-1}(Y)\right)$.

On en déduit que, si f est surjective, c'est-à-dire $f(E) = F$, on a $f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y \cap F = Y$.

Ex. 21

1) Il est immédiat que $f\left(\mathcal{P}(E)\right)$ est $\mathcal{P}(A)$ et que $g\left(\mathcal{P}(E)\right)$ est l'ensemble des parties de E qui contiennent A.

Si $A \neq E$, f n'est ni injective ni surjective ; si $A \neq \varnothing$, g n'est ni injective ni surjective.

2) Soit $Y \in \mathcal{P}(E)$. Si $Y \cap \overline{A} \neq \varnothing$, on a $f^{-1}(Y) = \varnothing$.

Si $Y \cap \overline{A} = \varnothing$, c'est-à-dire $Y \subset A$, $f^{-1}(Y)$ est l'ensemble des parties de A formées de la réunion de Y et d'un sous-ensemble de $\overline{A}$.

Si $Y \cap A \neq A$, c'est-à-dire $Y \not\supset A$, $g^{-1}(Y) = \varnothing$.

Si $Y \supset A$, $g^{-1}(Y)$ est l'ensemble des parties de E formées de la réunion de $Y \setminus A$ est d'une partie de A.

Ex. 22

1) $X \mapsto \overline{X}$ est une bijection de $\mathcal{P}(E)$ donc $S = \displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} \overline{X}$.

Il vient $2S = \displaystyle\sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} X + \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} \overline{X} = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} \operatorname{Card} E = n\,2^n$ d'où $S = n\,2^{n-1}$.

Niveau 3

Ex. 23

On résout ce problème à l'aide des fonctions caractéristiques des sous-ensembles A, B et C de E.

1) La fonction caractéristique de $A\triangle(B\cap C)$ est $\varphi_A+\varphi_B\,\varphi_C-2\,\varphi_A\,\varphi_B\varphi_C$.

2) Celle de $(A\triangle B)\cap(A\triangle C)$ est $\left(\varphi_A+\varphi_B-2\,\varphi_A\,\varphi_B\right)\left(\varphi_A+\varphi_C-2\,\varphi_A\,\varphi_C\right)$, ce qui s'écrit, en développant et en réduisant, $\varphi_A-\varphi_A\,\varphi_B-\varphi_A\,\varphi_C+\varphi_B\varphi_C$.

3) Les deux fonctions caractéristiques sont égales si et seulement si $\varphi_A\,\varphi_B+\varphi_A\,\varphi_C-2\,\varphi_A\varphi_B\varphi_C=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\varphi_A\left(\varphi_B+\varphi_C-2\,\varphi_B\,\varphi_C\right)=0$, $\varphi_A\varphi_{B\triangle C}=0$ ou enfin $\varphi_{A\cap(B\triangle C)}=0$.

4) En conclusion, l'égalité proposée a lieu si et seulement si $A\cap(B\triangle C)=\varnothing$ ou $B\triangle C\subset\overline{A}$.

Ex. 24

Soit f une application de E dans $\mathcal{P}(E)$. Si f est surjective, il existe alors $a\in E$ tel que $f(a)=A_f=\{x\in E, x\notin f(x)\}$. On ne peut avoir ni $a\in A_f$ ni $a\notin A_f$. La contradiction ainsi mise en évidence infirme la surjectivité de f.

Ex. 25

1) $\varnothing\in\mathcal{X}$; en effet $f(\varnothing)=\varnothing$ et $g(F\setminus\varnothing)=g(F)\subset E=E\setminus\varnothing$.

2) Soit $B=\displaystyle\bigcup_{A\in\mathcal{X}}A$. Il reste à vérifier que $B\in\mathcal{X}$.

Dans la suite, pour alléger les écritures, les réunions ou intersections portent sur les éléments A de $\mathcal{X}$.

On a $f(B)=f\left(\bigcup A\right)=\bigcup f(A)$, d'où :

$$F\setminus f(B)=F\cap\overline{\bigcup f(A)}=F\cap\left(\bigcap\overline{f(A)}\right)=\bigcap\left(F\cap\overline{f(A)}\right)=\bigcap\left(F\setminus f(A)\right).$$

g étant injective, l'image par g d'une intersection de sous-ensembles est égale à l'intersection de leurs images.

Donc $g\big(F\setminus f(B)\big)=g\left(\bigcap F\setminus f(A)\right)=\bigcap g\big(F\setminus f(A)\big)$.

Avec $g\big(F\setminus f(A)\big)\subset E\setminus A$, il vient :

$$g\big(F\setminus f(B)\big)\subset\bigcap E\setminus A=E\setminus\bigcup A=E\setminus B.$$

B est donc, pour l'inclusion, le plus grand élément de $\mathcal{X}$.

3) On a $g\big(F\setminus f(B)\big)\subset E\setminus B$.

Supposons qu'il existe $x\in E\setminus B$ tel que $x\notin g\big(F\setminus f(B)\big)$ et posons $B'=B\cup\{x\}$. On a :

$$f(B')=f(B)\cup f(\{x\})\ \text{ et }\ F\setminus f(B')=F\cap\left(\overline{f(B)}\cap\overline{f(\{x\})}\right)=\big(F\setminus f(B)\big)\cap\big(F\setminus f(\{x\})\big).$$

On en déduit $g\big(F\setminus f(B')\big)=g\big(F\setminus f(B)\big)\cap g\big(F\setminus f(\{x\})\big)$ car g est injective.

Or, $g\big(F\setminus f(B)\big)\subset E\setminus(B\cup\{x\})$ par hypothèse sur x. Il vient alors :

$$g\big(F\setminus f(B')\big)\subset E\setminus B',\ \text{donc } B'\in\mathcal{X},$$

ce qui est contraire au fait que B est le plus grand élément de $\mathcal{X}$.

On a donc $g\big(F\setminus f(B)\big)=E\setminus B$.

4) Soit h l'application de E dans F définie par :

$$\begin{cases} h(x)=f(x) & \text{si } x\in B\\ h(x)=g^{-1}(x) & \text{si } x\in E\setminus B\end{cases}$$

Il est immédiat que h est une bijection.

Ex. 26

1) Supposons que $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ pour tout $A\subset E$. En particulier, lorsque $A=E$, on obtient :

$$f(\overline{E})=\overline{f(E)}\text{ c'est-à-dire } f(\varnothing)=\overline{f(E)}\text{ ou }\varnothing=\overline{f(E)}$$

ce qui montre de f est surjective.

Soit x et y deux éléments différents de E. On a donc :

$$y \in \overline{\{x\}}, f(y) \in f\left(\overline{\{x\}}\right) = \overline{f(\{x\})}$$

et par suite $f(y) \neq f(x)$ ce qui montre que f est injective.

2) Soit g une application d'un ensemble X dans un ensemble Y.

Pour des sous-ensembles U et V de Y, on a :

$$g^{-1}(U \setminus V) = g^{-1}(U) \setminus g^{-1}(V)$$

(voir l'exercice 29, question 5). En particulier :

$$g^{-1}(\overline{U}) = g^{-1}(Y) \setminus g^{-1}(U) \text{ et } g^{-1}(\overline{U}) = \overline{g^{-1}(U)}$$

lorsque g est surjective. On applique le résultat à la fonction f^{-1}, pour conclure que :

$$\text{pour tout } A \subset E, \quad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

Ex. 27

1) Supposons f injective. Soit D un ensemble et g, h dans E^D telles que $f \circ g = f \circ h$.

Pour tout $z \in D, f \circ g(z) = f \circ h(z) \Rightarrow g(z) = h(z)$ et par suite $g = h$.

2) Soit x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$.

Soit $D = \{z\}$ un singleton et considérons g, h dans E^D définies par $g(z) = x$ et $h(z) = x'$. On a :

$$f \circ g(z) = f \circ h(z) \text{ et donc } f \circ g = f \circ h\,;$$

il s'ensuit $g = h$ et donc $g(z) = h(z)$, c'est-à-dire $x = x'$.

Ex. 28

1) Supposons f injective.

On a $f(E) = (E \cap A, E \cap B) = (A, B)$. Avec :

$$f(A \cup B) = \big((A \cup B) \cap A, (A \cup B) \cap B\big) = (A, B).$$

Par suite, $A \cup B = E$.

Supposons que $A \cup B = E$ et considérons X et Y tels que $f(X) = f(Y)$, c'est-à-dire :

$$X \cap A = Y \cap A \text{ et } X \cap B = Y \cap B.$$

Il vient $(X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ d'où $X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$ puis $X = Y$.

2) Supposons f surjective.

Il existe X tel que $f(X) = (A, \varnothing)$, c'est-à-dire $A \cap X = A$ et $B \cap X = \varnothing$, ou encore $A \subset X \subset \overline{B}$ et donc $A \cap B = \varnothing$.

Supposons $A \cap B = \varnothing$ et considérons $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. On a :

$$\begin{aligned} f(X \cup Y) &= \big((X \cup Y) \cap A, (X \cup Y) \cap B\big) \\ &= \big((X \cap A) \cup (Y \cap A), (X \cap B) \cup (Y \cap B)\big) \\ &= (X \cup \varnothing, \varnothing \cup Y) = (X, Y). \end{aligned}$$

Ex. 30

1) Si $p = q$ ou si $q = n - p$, il est vrai que $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$. Supposons $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ avec $p \neq q$, $p < q$ par exemple.

Cela s'écrit :

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{q!(n-q)!} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{(n-p)!}{(n-q)!} = \frac{q!}{p!}$$

ou encore :

$$(n-p)(n-p-1)\ldots(n-q+1) = q(q-1)\ldots(p+1).$$

On est en présence de deux produits de $q - p$ entiers consécutifs, qui sont égaux si et seulement si les plus grands termes de ces produits sont égaux, c'est-à-dire si $n - p = q$ soit $p + q = n$.

2) Avec $n \in \mathbb{N}$, $3n - 1 \geqslant 0$ nécessite $n \geqslant 1$ et $3n - 1 \leqslant 2n + 4$ exige $n \leqslant 5$.

$n^2 - 2n + 3 = (n-1)^2 + 2 \geqslant 2$ montre que $n^2 - 2n + 3 > 0$ et $n^2 - 2n + 3 \leqslant 2n + 4$ s'écrit $(n-2)^2 - 5 \leqslant 0$, ce qui, avec $n \in \mathbb{N}$, exige $0 \leqslant n \leqslant 4$.

En conséquence, on a $0 \leqslant 3n-1 \leqslant 2n+4$ et $0 \leqslant n^2-2n+3 \leqslant 2n+4$ si et seulement si $n \in [\![1,4]\!]$, et l'équation se lit alors $3n-1 = n^2-2n+3$ ou $3n-1 = 2n+4-(n^2-2n+3)$.

$3n-1 = n^2-2n+3$, c'est-à-dire $n^2-5n+4=0$ donne $n=1$ ou $n=4$,

$3n-1+\left(n^2-2n+3\right) = 2n+4$, c'est-à-dire $n^2-n-2=0$ donne $n=2$.

En outre, tout $n \in \mathbb{N}$, $n > 5$ implique $3n+1 > 2n+4$ et $n^2-2n+3 > 2n+4$ et se sont aussi des solutions.

Comme il est clair que 5 ne convient pas, l'ensemble des solutions est finalement :

$$\{2,4\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 6\} = \mathbb{N} \setminus \{0,1,3,5\}.$$

Ex. 31

Posons $S_1 = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X\cap Y)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)} \operatorname{Card}(X\cup Y)$.

La bijection $X \mapsto \overline{X}$ de $\mathcal{P}(E)$ donne :

$$S_1 = \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card}(X\cap Y) = \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card}\left(\overline{X}\cap Y\right) = \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card}\left(X\cap \overline{Y}\right) = \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card}\left(\overline{X}\cap \overline{Y}\right).$$

On en déduit :

$$4S_1 = \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card}(X\cap Y) + \operatorname{Card}\left(\overline{X}\cap Y\right) + \operatorname{Card}\left(X\cap \overline{Y}\right) + \operatorname{Card}\left(\overline{X}\cap \overline{Y}\right) = \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card} E = n\left(2^n\right)^2,$$

et $S_1 = n\,4^{n-1}$. De plus :

$S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{(X,Y)} \operatorname{Card}(X\cap Y) + \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card}(X\cup Y)$ c'est-à-dire $S_1 + S_2 = \displaystyle\sum_{(X,Y)} \operatorname{Card} X + \operatorname{Card} Y$

$$S_1 + S_2 = \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card} X + \sum_{(X,Y)} \operatorname{Card} Y = 2\sum_{(X,Y)} \operatorname{Card} X = 2\cdot 2^n \sum_{X} \operatorname{Card} X = 2^{n+1}\cdot n2^{n-1} = n4^n = 4S_1.$$

On en déduit $S_2 = 3S_1 = 3n4^{n-1}$.

Ex. 32

1) Les partitions de E en deux parties (non vides) sont les paires $\{X,\overline{X}\}$, avec $X \neq E$ et $X \neq \varnothing$.

Il y a $2^n - 2$ sous-ensembles X, avec $X \neq E$ et $X \neq \varnothing$.

La bijection $X \mapsto \left(X,\overline{X}\right)$ montre que le nombre de paires $\left(X,\overline{X}\right)$, avec $X \notin \{\varnothing, E\}$, est 2^n-2.

Les paires $\left(X,\overline{X}\right)$ et $\left(\overline{X},X\right)$ définissant la même partition, il y a $2^{n-1}-1$ partitions de E en deux parties.

2) Soit K_n le nombre de partitions de E en trois parties non vides.

- On a $K_0 = K_1 = K_2 = 0$ et $K_3 = 1$.
- Pour $n \geqslant 3$, on considère $a \in E$.

Parmi les K_n partitions de E, on distingue celles dont $\{a\}$ est un élément et celles dont $\{a\}$ n'est pas un élément.

Les premières sont au nombre de $2^{n-2}-1$ (on complète $\{a\}$ par une partition en deux de $E \setminus \{a\}$).

Si $\{a\}$ n'est pas élément de partition, une partition $\{A,B,C\}$ de $E \setminus \{a\}$ donne 3 partitions de E :

$$\big\{A\cup\{a\}, B, C\big\},\ \big\{A, B\cup\{a\}, C\big\} \text{ et } \big\{A, B, C\cup\{a\}\big\}.$$

En définitive, on obtient $K_n = 3K_{n-1} + 2^{n-2} - 1$.

Montons (par récurrence) que $K_n = \dfrac{1}{2}\left(3^{n-1}+1\right) - 2^{n-1}$. C'est vrai aux rangs 1, 2 et 3.

Si on a $K_n = \dfrac{1}{2}3^{n-1} + \dfrac{1}{2} - 2^{n-1}$, alors il vient $K_{n+1} = 3K_n + 2^{n-1} - 1 = \dfrac{1}{2}3^n + \dfrac{3}{2} - 3\times 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1$,

c'est-à-dire $K_{n+1} = \dfrac{1}{2}3^n + \dfrac{1}{2} - 2^n$. Donc la propriété est héréditaire et, puisqu'elle est vraie pour $n=1$, elle l'est aussi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ex. 33

Notons $\mathscr{P}(p)$ la proposition relative à la réunion d'une famille finie de p ensembles. La propriété $\mathscr{P}(1)$ est un truisme.

La propriété $\mathscr{P}(2)$ est un théorème $\operatorname{Card}(A_1 \cup A_2) = \operatorname{Card}(A_1) + \operatorname{Card}(A_2) - \operatorname{Card}(A_1 \cap A_2)$.

Avec $\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k = \left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \cup A_{p+1}$, il vient $\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{p+1} A_k = \operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{p} A_k + \operatorname{Card} A_{p+1} - \operatorname{Card}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \cap A_{p+1}\right)$

Par distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, il vient $\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) \cap A_{p+1} = \bigcup_{k=1}^{p} (A_k \cap A_{p+1})$.

On utilise alors à deux reprises la propriété $\mathscr{P}(p)$.

$$\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{p} (A_k \cap A_{p+1}) = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Card}(A_k \cap A_{p+1}) - \sum_{k<r} \operatorname{Card}(A_k \cap A_r \cap A_{p+1}) + \ldots + (-1)^{p+1} \operatorname{Card} \bigcap_{k=1}^{p+1} A_k$$

$$\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{p} A_k = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Card} A_k - \sum_{k<r} \operatorname{Card}(A_k \cap A_r) + \sum_{k<r<s} \operatorname{Card}(A_k \cap A_r \cap A_s) + \cdots + (-1)^{p+1} \operatorname{Card} \bigcap_{k=1}^{p} A_k$$

Il vient alors $\operatorname{Card} \bigcup_{k=1}^{p+1} A_k = \sum_{k=1}^{p+1} \operatorname{Card} A_k - \sum_{k<r} \operatorname{Card}(A_k \cap A_r) + \ldots + (-1)^{p+2} \operatorname{Card} \bigcap_{k=1}^{p+1} A_k$.

On a ainsi prouvé l'implication $\mathscr{P}(p) \Rightarrow \mathscr{P}(p+1)$, donc $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.