

TABLE DES MATIÈRES : ALGÈBRE ET ANALYSE

	COMBINATOIRE	1
Chapitre 1.	<i>p</i> -listes. Arrangements. Permutations	3
1.	Réunions d'ensembles finis	3
2.	Produits d'ensembles finis	3
3.	Arrangements et permutations	4
4.	Applications	5
Chapitre 2.	<i>Dénombrement des combinaisons</i>	7
1.	Définition	7
2.	Détermination des coefficients binomiaux	7
3.	Relations vérifiées par les coefficients binomiaux	7
4.	Triangle de Pascal	8
5.	Formule du binôme	9
6.	Applications	9
Chapitre 3.	<i>Séries formelles et combinatoire</i>	14
1.	Rappels sur les séries formelles	14
2.	Applications à des problèmes de dénombrement	15
Chapitre 4.	<i>Quelques triangles analogues à celui de Pascal</i>	17
1.	Nombres de <i>Stirling</i> de première espèce	17
2.	Nombres de <i>Stirling</i> de deuxième espèce	18
3.	Nombre de surjections d'un ensemble fini sur un ensemble fini	19
4.	Les matrices de <i>Stirling</i> <i>s</i> et <i>S</i> inverses l'une de l'autre	20
5.	Exercice	20
Chapitre 5.	<i>Suite de Fibonacci</i>	22
1.	Définition	22
2.	Valeur et propriétés des nombres F_n	22
Chapitre 6.	<i>Principes généraux de combinatoire</i>	25
	ARITHMÉTIQUE	29
Chapitre 7.	<i>Les nombres entiers naturels</i>	31
1.	Définition	31
2.	Addition	31
3.	Multiplication	32
4.	Compléments sur la récurrence	32
Chapitre 8.	<i>Division euclidienne dans \mathbb{N} et dans \mathbb{Z}</i>	34
1.	Division euclidienne dans \mathbb{N}	34
2.	Division euclidienne dans \mathbb{Z}	34
3.	Applications	35
Chapitre 9.	<i>PGCD - PPCM</i>	40
1.	PGCD	40
2.	PPCM	41
3.	Applications à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	42
4.	Utilisation de la décomposition d'un nombre en facteurs premiers	42
5.	Lien entre PGCD, PPCM et idéaux de \mathbb{Z}	43
6.	Exercices	43

Chapitre 10. <i>Nombres premiers</i>	45
1. Définition	45
2. Propriétés	45
3. Crible d'Ératosthène	45
4. Programme Quick Basic	46
5. Nombres premiers et nombres premiers entre eux	46
6. Décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers	47
7. Deux résultats classiques	47
8. Quelques compléments	48
9. Exercice	51
Chapitre 11. <i>Nombres de Fermat - constructions à la règle et au compas</i>	52
1. Introduction	52
2. Recherche des diviseurs éventuels des nombres de <i>Fermat</i>	53
3. Nombres de <i>Fermat</i> et construction des polygones réguliers	55
4. Autres conséquences du théorème de <i>Wantzel</i>	60
Chapitre 12. <i>Construction du corps des rationnels</i>	61
1. Définition du corps des nombres rationnels	61
2. Propriétés du corps des nombres rationnels	62
Chapitre 13. <i>Nombres décimaux</i>	64
1. Fractions décimales	64
2. Nombres décimaux	64
3. Exercice	66
ALGÈBRE	67
Chapitre 14. <i>Nombres complexes</i>	69
1. Aperçu historique	69
2. Introduction des nombres complexes	70
3. Représentation géométrique	71
4. Automorphismes de \mathbb{C} . Nombres complexes conjugués	72
5. Équation du second degré	72
6. Module et argument d'un nombre complexe	73
7. Racines n -ièmes d'un nombre complexe	78
8. Nombres complexes et géométrie	81
9. Équations du troisième et du quatrième degré	83
10. Exercice sur le triangle équilatéral	86
11. La comptine de <i>Bombelli</i>	86
Chapitre 15. <i>Fonctions polynômes</i>	87
1. Définition	87
2. Opérations algébriques sur les polynômes	88
3. Factorisation d'un polynôme - racines d'un polynôme	89
4. Applications	91
5. Exercices	92
Chapitre 16. <i>Somme et produit des racines d'une équation du 2^e degré</i>	93
1. Somme et produit des racines de $ax^2 + bx + c = 0$	93
2. Applications	93

Chapitre 17. <i>Équations algébriques - relations entre coefficients et racines</i>	98
1. Fonctions symétriques	98
2. Formules de <i>Newton</i>	100
3. Élimination	101
Chapitre 18. <i>Systèmes linéaires - méthode du pivot de Gauss</i>	103
1. Exposé de la méthode	103
2. Discussion sur le système triangulaire obtenu <i>S'</i>	104
3. Les erreurs d'arrondi	105
4. Exercices	106

ANALYSE 109

Chapitre 19. <i>Suites numériques - convergence - comparaison</i>	111
1. Définitions	111
2. Convergence des suites numériques	111
3. Propriétés des limites de suites convergentes	112
4. Composition par une fonction continue	113
5. Comparaison de suites	113
6. Sous-suites ; valeur d'adhérence	115
7. Approximation d'un nombre réel	116
8. Exercice (faisant intervenir les intégrales de <i>Wallis</i>)	118
Chapitre 20. <i>Suites divergentes</i>	120
1. Définition	120
2. Suites divergeant vers l'infini	120
3. Suites divergentes ne divergeant pas vers l'infini	120
4. Opérations, composition, comparaison	121
5. Exercice	122
Chapitre 21. <i>Suites $a^n, n^b, n!$</i>	123
1. Étude des suites de terme général $a^n, n^b, n!$	123
2. Croissance comparée	124
3. Exemples	124
Chapitre 22. <i>Suites récurrentes [suites définies par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$]</i>	126
A : f est une fonction affine	126
1. Cas particuliers	126
2. Cas général	127
3. Exercices et exemples d'intervention	127
B : f est une fonction homographique	128
C : f est une fonction quelconque	129
1. Généralités	129
2. Application contractante ; théorème du point fixe	129
Chapitre 23. <i>Calcul de la valeur approchée d'une intégrale</i>	133
1. Méthode des rectangles	133
2. Méthode des trapèzes	134
3. Méthode du point moyen	134
4. Méthode de Simpson	135

5.	Illustration	137
6.	Calcul effectif	138
Chapitre 24.	<i>Accélération de la convergence pour une suite</i>	139
1.	Introduction	139
2.	Méthodes d'accélération de la convergence	139
Chapitre 25.	<i>Homomorphismes de \mathbb{R} dans lui-même</i>	144
1.	Du corps \mathbb{R} dans lui-même	144
2.	Du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même	144
3.	Du groupe multiplicatif (\mathbb{R}_+^*, \cdot) dans le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$	144
4.	Du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe multiplicatif (\mathbb{R}_+^*, \cdot)	145
5.	Du groupe multiplicatif (\mathbb{R}_+^*, \cdot) dans lui-même	146
6.	Exercice	146
Chapitre 26.	<i>Approximation d'une fonction par des polynômes</i>	147
1.	Fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$	147
2.	Fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$	147
3.	Fonctions $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x$	147
4.	Fonction logarithme et fonction exponentielle	148
5.	Exercice	149
Chapitre 27.	<i>Équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$</i>	150
1.	Définitions	150
2.	Intégration de (E)	150
3.	Une caractérisation des fonctions sinus et cosinus	151
Chapitre 28.	<i>Moyennes de n nombres positifs</i>	152
1.	Définitions	152
2.	Théorème	152
3.	Applications	153
4.	Une inégalité trigonométrique	154
Chapitre 29.	<i>Les fonctions circulaires : une introduction inversée</i>	155
1.	La fonction tangente	155
2.	Les fonctions sinus et cosinus	156
3.	Mise en garde	158
4.	Valeur approchée de π avec mille décimales	159
Chapitre 30.	<i>Limite - continuité</i>	160
1.	Rappels	160
2.	Limite	160
3.	Continuité	164

TABLE DES MATIÈRES : GÉOMÉTRIE

THÉORÈMES ET CONFIGURATIONS DE BASE ... 169

Chapitre 31. <i>Théorème de Thalès</i>	171
1. Deux axiomes préliminaires	171
2. Théorème de <i>Thalès</i> dans le plan	172
3. Théorème de <i>Thalès</i> dans l'espace	174
4. Applications	175
5. Projections	176
Chapitre 32. <i>Produit scalaire</i>	178
1. Rapport de projection de deux axes	178
2. Produit scalaire de deux vecteurs	179
3. Applications du produit scalaire	180
Chapitre 33. <i>Produit vectoriel - Produit mixte</i>	183
1. Produit vectoriel	183
2. Produit mixte	185
3. Généralisation	186
Chapitre 34. <i>Barycentre</i>	188
1. Fonction vectorielle de <i>Leibniz</i>	188
2. Barycentre de n points pondérés	188
3. Applications affines	190
4. Convexité	190
5. Quelques barycentres classiques	191
6. Fonction scalaire de <i>Leibniz</i>	195
7. Trois résultats classiques	197
8. Triangle podaire et droite de <i>Simson</i>	199
9. Exercices	200
Chapitre 35. <i>La droite en géométrie plane</i>	204
1. Rappel	204
2. Représentations paramétriques	204
3. Équation cartésienne	205
4. Compléments en géométrie euclidienne	207
5. Exercices	208
Chapitre 36. <i>Droites et plans dans l'espace</i>	211
1. La droite	211
2. Le plan	211
3. Positions relatives de deux plans	212
4. Positions relatives d'une droite et d'un plan	213
5. Positions relatives de deux droites	214
6. Plans contenant une droite donnée	214
7. Cas de la géométrie euclidienne	214
Chapitre 37. <i>Harmonicité</i>	218
1. Notion de plan projectif	218
2. Birapport	219

3.	Division harmonique	220
4.	Faisceau harmonique	221
5.	Birapport de quatre points cocycliques	224
Chapitre 38. <i>Le cercle</i>		226
1.	Définition - Équation	226
2.	Positions relatives d'une droite et d'un cercle	226
3.	Positions relatives de deux cercles	227
4.	Propriétés angulaires du cercle	229
5.	Puissance d'un point par rapport à un cercle	232
6.	Cercles orthogonaux	235
7.	Faisceaux de cercles	237
8.	Polarité par rapport à un cercle	242
Chapitre 39. <i>Droites et cercles remarquables dans un triangle</i>		247
1.	Médianes	247
2.	Médiatrices	247
3.	Hauteurs	247
4.	Droite et cercle d' <i>Euler</i>	248
5.	Bissectrices. Cercle inscrit et cercles exinscrits	248
6.	Transversales et céviennes	249
7.	Droite de <i>Simson</i> et droite de <i>Steiner</i>	251
8.	Exercice	253
Chapitre 40. <i>Relations métriques dans un triangle quelconque</i>		254
1.	Systèmes fondamentaux	254
2.	Somme et différence des carrés des longueurs de deux côtés	255
3.	Aire d'un triangle	256
4.	Cas d'isométries des triangles quelconques	257
Chapitre 41. <i>Relations métriques dans un triangle rectangle</i>		258
1.	Relations métriques	258
2.	Relations trigonométriques	259
3.	Applications	259
4.	Les triplets pythagoriciens	260
5.	Démonstrations artisanales du théorème de <i>Pythagore</i>	261
5.	Cas d'isométries des triangles rectangles	261
Chapitre 42. <i>Quadrilatères convexes</i>		262
1.	Propriétés caractéristiques de certains quadrilatères	262
2.	Quadrilatère convexe inscritible. Formulaire	265
3.	Un problème d'extremum	266
Chapitre 43. <i>Le tétraèdre orthocentrique</i>		268
1.	Existence et propriétés fondamentales	268
2.	Droite et sphères d' <i>Euler</i> d'un tétraèdre orthocentrique	269
Chapitre 44. <i>Isogonalité</i>		271
1.	Points inverses par rapport à un triangle	271
2.	Étude barycentrique	273
3.	Les cercles d' <i>Apollonius</i>	275
4.	Coniques tangentes aux trois côtés d'un triangle	275
5.	Transformée d'une courbe	276

Chapitre 45. <i>Les polyèdres réguliers et semi-réguliers</i>	278
1. Les cinq polyèdres réguliers convexes	278
2. Les quatre polyèdres réguliers concaves	283
3. Les polyèdres semi-réguliers	283
TRANSFORMATIONS 285	
Chapitre 46. <i>Généralités sur les isométries</i>	287
1. Définition	287
2. Propriétés	287
3. Isométries positives - Isométries négatives	289
4. Groupe des isométries	289
5. Isométries vectorielles	289
6. Exercice	290
Chapitre 47. <i>Isométries du plan</i>	292
1. Réflexion par rapport à une droite	292
2. Translation	292
3. Rotation	293
4. Produits d'isométries	294
5. Description des isométries grâce aux points fixes	295
6. Réflexion du plan échangeant deux points	297
7. Réflexion du plan échangeant deux droites sécantes	298
8. Exercices	299
Chapitre 48. <i>Isométries de l'espace</i>	303
1. Étude de quelques exemples	303
2. Produits d'isométries - les isométries fondamentales	304
3. Retournements	306
4. Description des isométries de l'espace grâce aux points fixes	308
5. Réflexion échangeant deux points - plan médiateur	310
6. Exercices et remarques	311
Chapitre 49. <i>Isométries conservant un ensemble fini de points</i>	313
1. Généralités	313
2. Les isométries du plan conservant certains polygones	314
3. Les isométries du tétraèdre régulier	316
4. Les isométries du cube et de l'octaèdre régulier	317
Chapitre 50. <i>Groupe des homothéties-translations</i>	319
1. Définition d'une homothétie	319
2. Les homothéties-translations	319
3. Transformées des figures usuelles	321
4. Applications de l'homothétie	321
Chapitre 51. <i>Similitudes planes</i>	324
1. Définition ; groupe des similitudes directes	324
2. Similitudes directes et nombres complexes	326
3. Forme réduite d'une similitude directe	327
4. Similitudes indirectes	328
5. Cas de similitude des triangles	331
6. Applications	331

Chapitre 52. <i>Inversion plane</i>	333
1. Définition et premières propriétés	333
2. Inverse d'une droite ; inverse d'un cercle	336
3. Applications de l'inversion	338
4. Inverse d'une conique	342

Chapitre 53. <i>Homographies dans le plan complexe</i>	345
1. La sphère de <i>Riemann</i>	345
2. Généralités sur les homographies	345
3. Suite récurrente associée à une homographie	346
4. Étude du cas particulier $z \mapsto (z - a)/(z - b)$	347

GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE - CINÉMATIQUE ... 349

Chapitre 54. <i>Courbes planes paramétrées</i>	351
1. Définition	351
2. Étude locale	351
3. Étude globale	353
4. Exercice	354

Chapitre 55. <i>Courbes planes en coordonnées polaires</i>	358
1. Introduction	358
2. Équations de quelques courbes	359
3. Étude locale	360
4. Étude globale	361
5. Étude de la courbe d'équation $\rho = a [1 + \tan(\theta/2)]$	362

Chapitre 56. <i>Courbure - Développée - Enveloppe - Cinématique</i>	364
1. Abscisse curviligne - Repère de <i>Frenet</i> - Courbure	364
2. Enveloppe d'une famille de droites	366
3. Cinématique	368
4. Exercice : enveloppe de la droite de <i>Simson</i>	373

Chapitre 57. <i>La cycloïde</i>	374
1. Définition et représentation géométrique	374
2. Tangente en un point	375
3. Mouvement d'un point pesant sur une arche de cycloïde	376
4. La brachystochrone	377
5. Aire d'une arche de cycloïde : calcul historique	379
6. Aire et longueur d'une arche de cycloïde à l'aide d'une cycloïde approchée	380
7. Aire d'une arche de cycloïde à l'aide d'une généralisation	381

Chapitre 58. <i>Les lois de Kepler</i>	383
1. Rappels	383
2. Mouvement d'un point matériel dans un champ newtonien	384

Chapitre 59. <i>Courbes gauches</i>	388
1. Plan osculateur ; repère de <i>Frenet</i> ; courbure ; torsion	388
2. Allure de la courbe au voisinage d'un point trirégulier	391
3. Un exemple : les hélices	391
4. Exercices	393

Chapitre 60. <i>La parabole</i>	397
1. Étude ponctuelle	397
2. Étude tangentielle	399
3. Intersection d'une droite et d'une parabole (étude géométrique)	402
Chapitre 61. <i>L'ellipse</i>	403
1. Étude ponctuelle	403
2. Étude tangentielle	408
3. Exercice	412
Chapitre 62. <i>L'hyperbole</i>	413
1. Étude ponctuelle	413
2. Étude tangentielle	416
3. Exercice	419
Chapitre 63. <i>Courbes d'équation $ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0$</i>	420
1. Transformée de l'équation par rotation du repère	420
2. Nature de la courbe	420
Chapitre 64. <i>Puissance d'un point par rapport à une conique</i>	422
1. Équation normalisée d'une conique	422
2. Puissance d'un point par rapport à une conique quelconque	423
3. Condition de cocyclicité de quatre points d'une conique	423
4. Conique radicale de deux coniques	424
5. Coniques conjuguées	425
6. Généralisation de la notion de faisceau de cercles	426
7. Quelques applications	426
8. Interprétation en géométrie de l'espace	428
Chapitre 65. <i>Sections planes de quadriques</i>	429
1. Généralités et premiers exemples	429
2. Cylindres de révolution	430
3. Cônes de révolution	433

EXERCICES 437

Dénombrement de triangles (439) – Partage du plan par n droites et de l'espace par n plans (439) – Jeu de pile ou face (440) – Démonstration combinatoire de la formule du crible (441) – Indicateur d'Euler et probabilités (442) – Le problème des anniversaires (442) – Une application de la formule de Bayes (443) – Exercices sur les nombres premiers (443) – Exemple de raisonnement par récurrence (444) – Trigonométrie : application à des polygones réguliers (445) – Equation du cercle circonscrit à un triangle (446) – Moyenne arithmético-géométrique (446) – Triangle aléatoire (449) – Construction au compas seul (449) – Symédianes d'un triangle rectangle (450) – Alignement des milieux des diagonales d'un quadrilatère complet (451) – Une table tournante (451) – Aire d'un segment de parabole (452) – Triangles particuliers inscrits dans une ellipse (454) – Ellipse et droite de Simson (454) – Ellipse et produit vectoriel (455) – Triangle isocèle ou non (455).